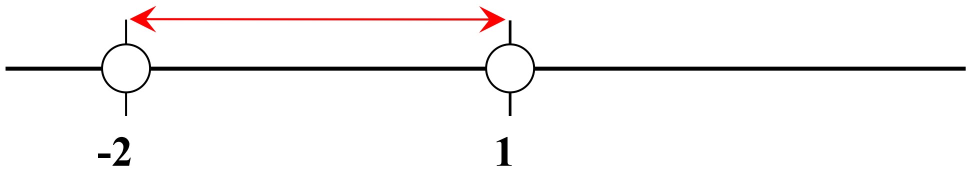
Tema 4

Autor: Antonio Rivero Cuesta, Tutor C.A. Palma de Mallorca

4.1 El intervalo abierto $(-2,1)$ es el conjunto de los números reales x que verifican:

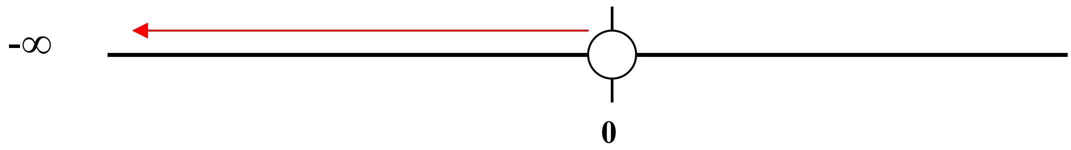
a) $-2 \leq x \leq 1$.
b) $-2 < x < 1$.
c) $x < -2$ o $x > 1$.



Intervalo abierto (a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a < x < b**.

4.2 El intervalo abierto $(-\infty, 0)$ es el conjunto de los números reales x que verifican:

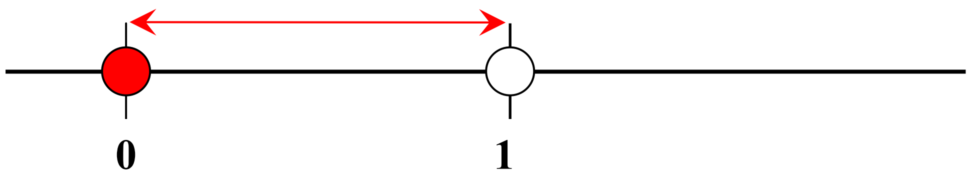
a) $x \leq 0$.
b) $x > 0$.
c) $x < 0$.



Intervalo abierto (a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a < x < b**.

4.3 El conjunto de los números reales x que verifican $0 \leq x < 1$, es igual al intervalo:

a) $[0,1)$.
b) $(0,1)$.
c) $(0,1]$.



Intervalo semiabierto [a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a ≤ x < b**.

4.4 La expresión $f(x)=\dfrac{1}{x}$ define una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cuando:

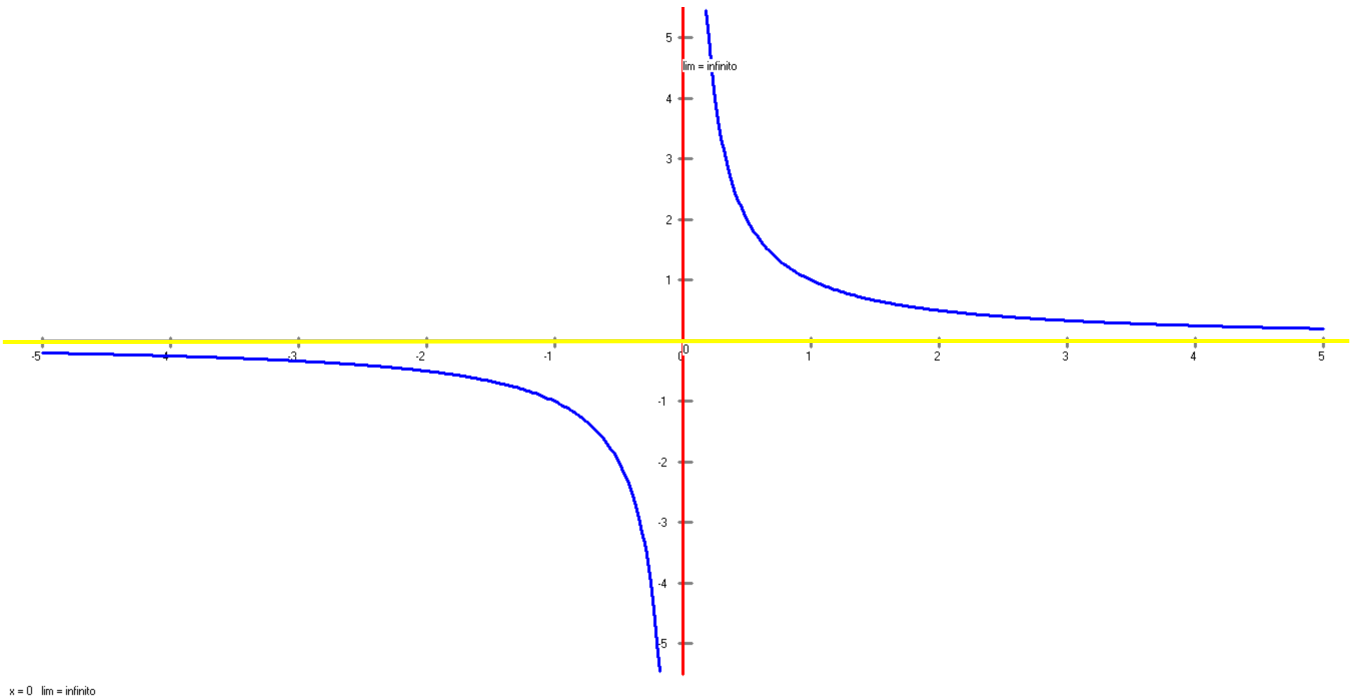
a) $I=(-\infty, 2]$.
b) $I=[-1,1)$.
c) $I=[1, \infty)$.

El dominio de definición de una función es el conjunto de elementos que tiene imagen.
La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ está definida en el intervalo $I=(1, \infty]$, porque el denominador se anula en $x=0$ y hay una asíntota vertical.

Asíntotas verticales, las asíntotas verticales se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

Asíntotas horizontales, hay asíntota horizontal en las funciones racionales cuando el numerador tiene grado menor o igual al denominador. $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}=0$$



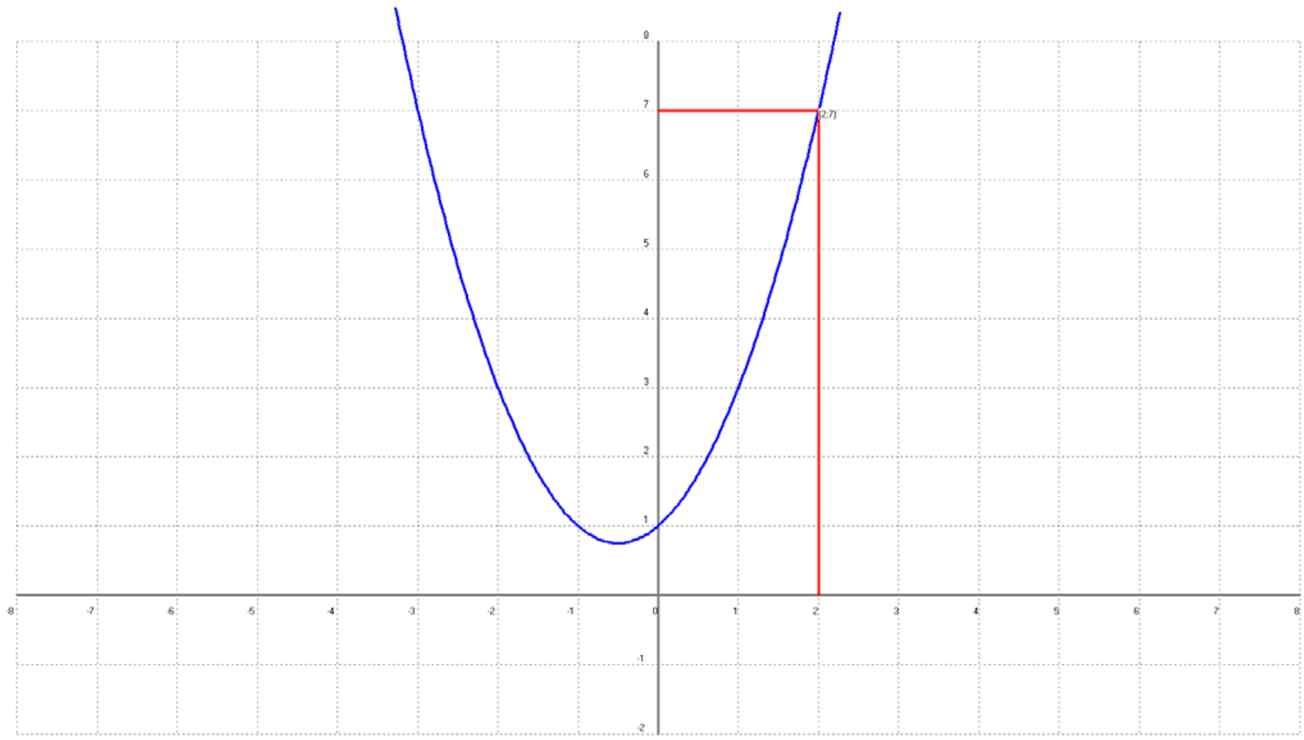
$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, la función f está definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, es decir de una parte de $\mathbb{R}$. Porque presenta problemas en un punto.
La I representa cualquier intervalo donde no se presentan problemas. $I=\{(-\infty, 0) \cup(0,+\infty)\}$.
Función: aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una **aplicación** entre dos conjuntos A y B es una transformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.

4.5 El gráfico de la función $f(x)=x^2+x+1$ pasa por el punto

a) (2,5).
b) (2,3).
c) (2,7).

El gráfico de la función $f(x)=x^2+x+1$ pasa por el punto (2,7).

a) $5 \neq 2^2+2+1$
b) $3 \neq 2^2+2+1$
c) $7 = 2^2+2+1$



4.6 El gráfico de la función $f(x)=x^3-2x+1$ NO pasa por el punto

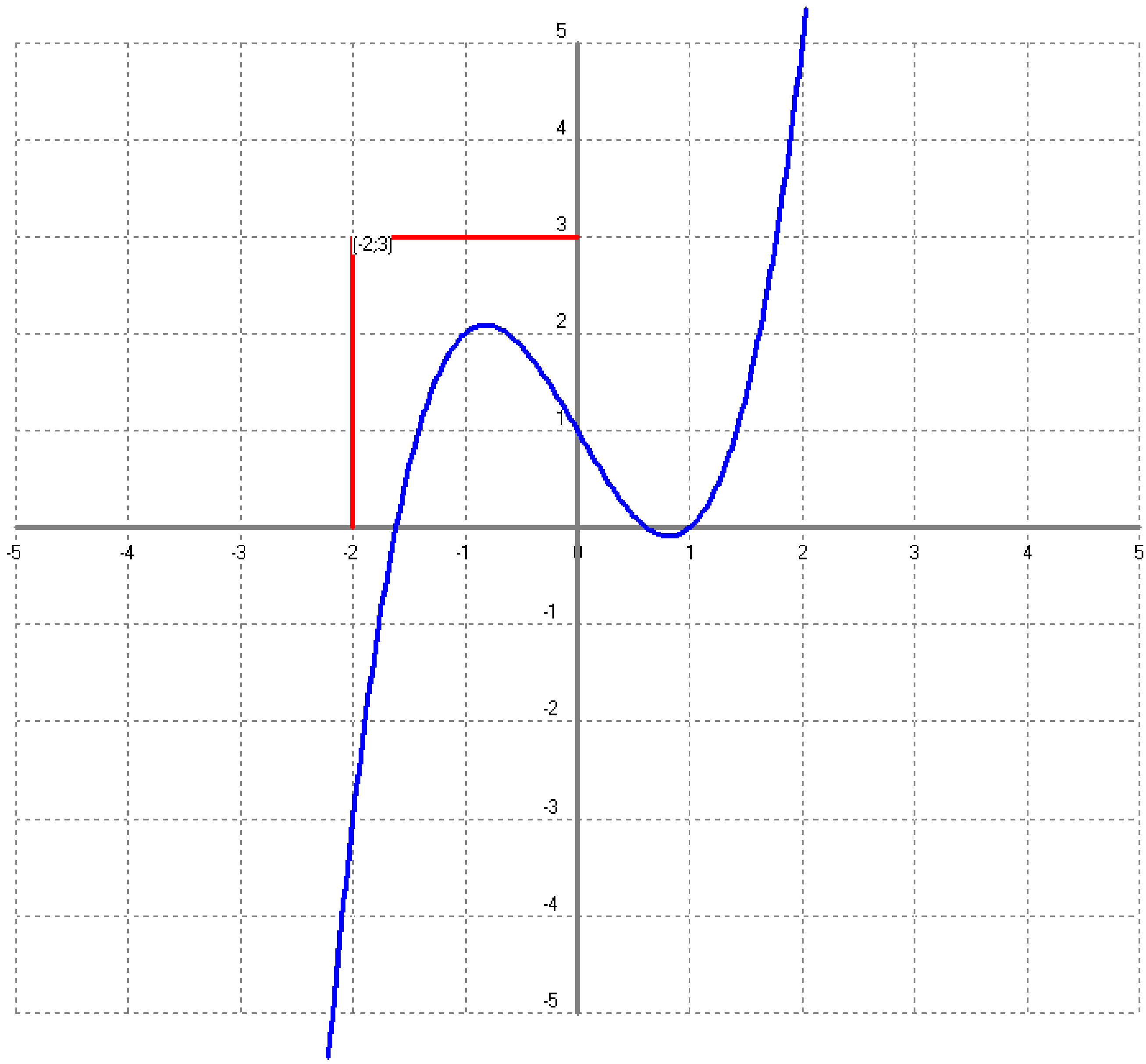
a) (2,5).
b) (-1,2).
c) (-2,3).

El gráfico de la función $f(x)=x^3-2x+1$ NO pasa por el punto (-2,3).

a) $5=(2)^3-2\cdot(2)+1$

b) $2=(-1)^3-2\cdot(-1)+1$

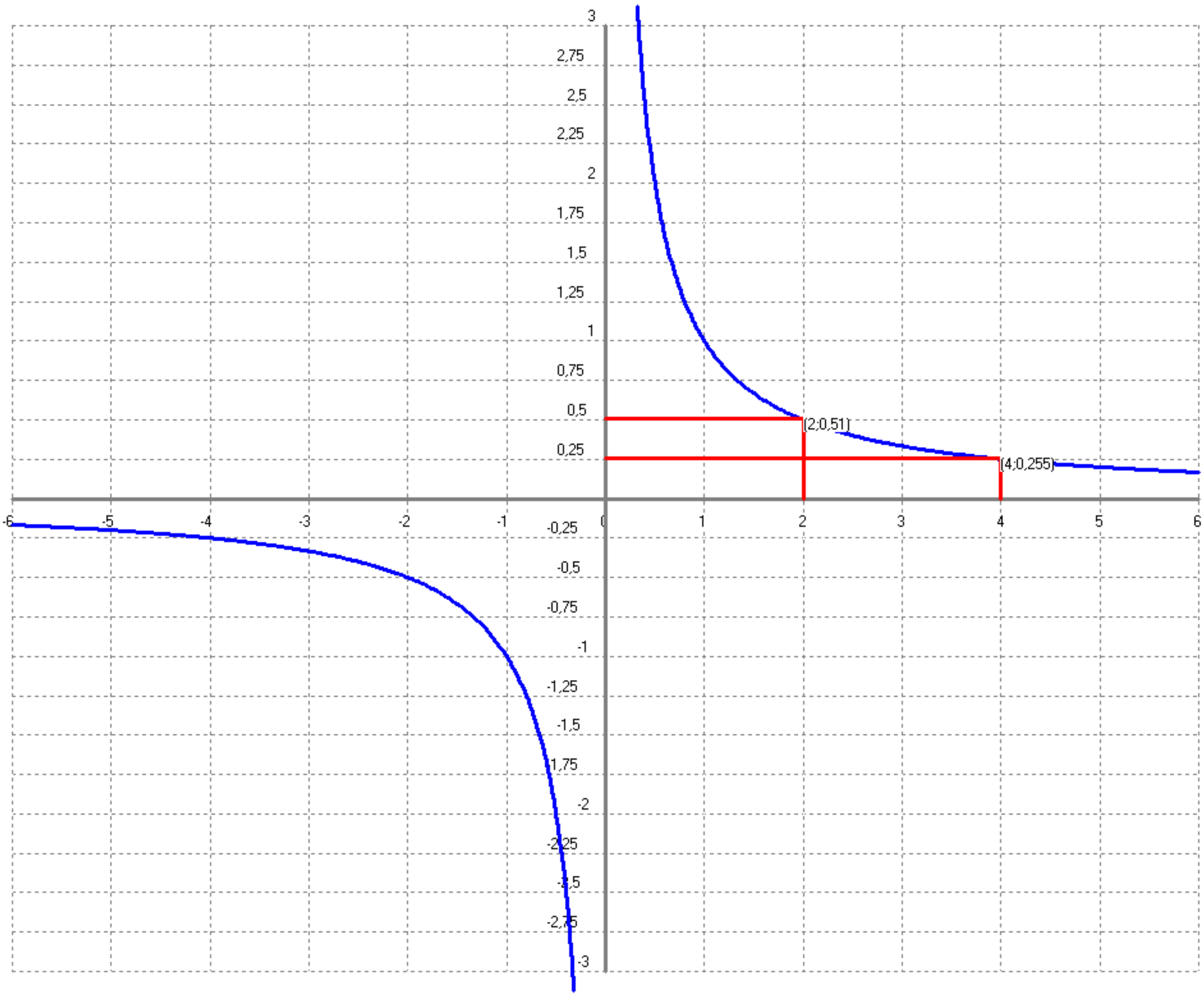
c) $3\neq(-2)^3-2\cdot(-2)+1$



4.7 El gráfico de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, pasa por los puntos:

a) (2, 0.5) y (4,1).
b) (2, 0.5) y (4, 0.25).
c) (0.5, 3) y (0.25, 4).

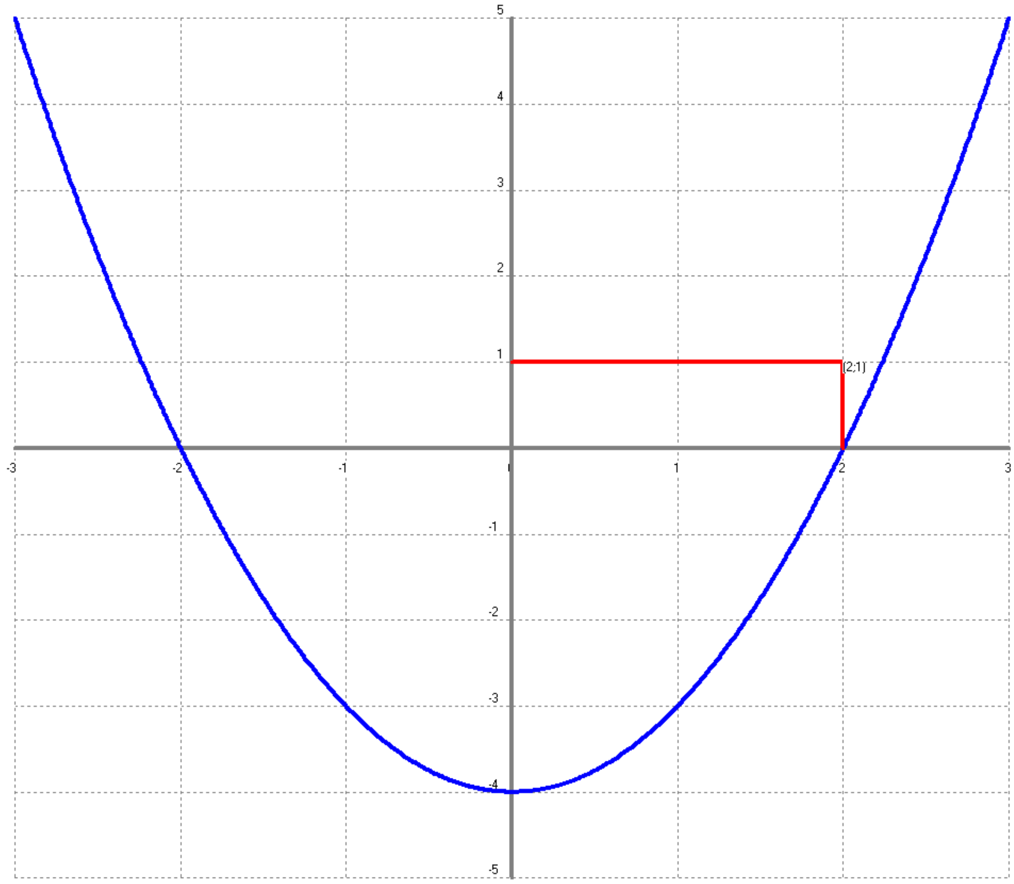
El gráfico de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pasa por los puntos (2, 0.5) y (4, 0.25).



4.8 Si *f* es la función $f(x) = x^2 - 4$ definida en $(-\infty, \infty)$, el punto (2,1) está

a) Por encima de la gráfica de *f*.
b) Por debajo de la gráfica de *f*.
c) Sobre la gráfica de *f*.

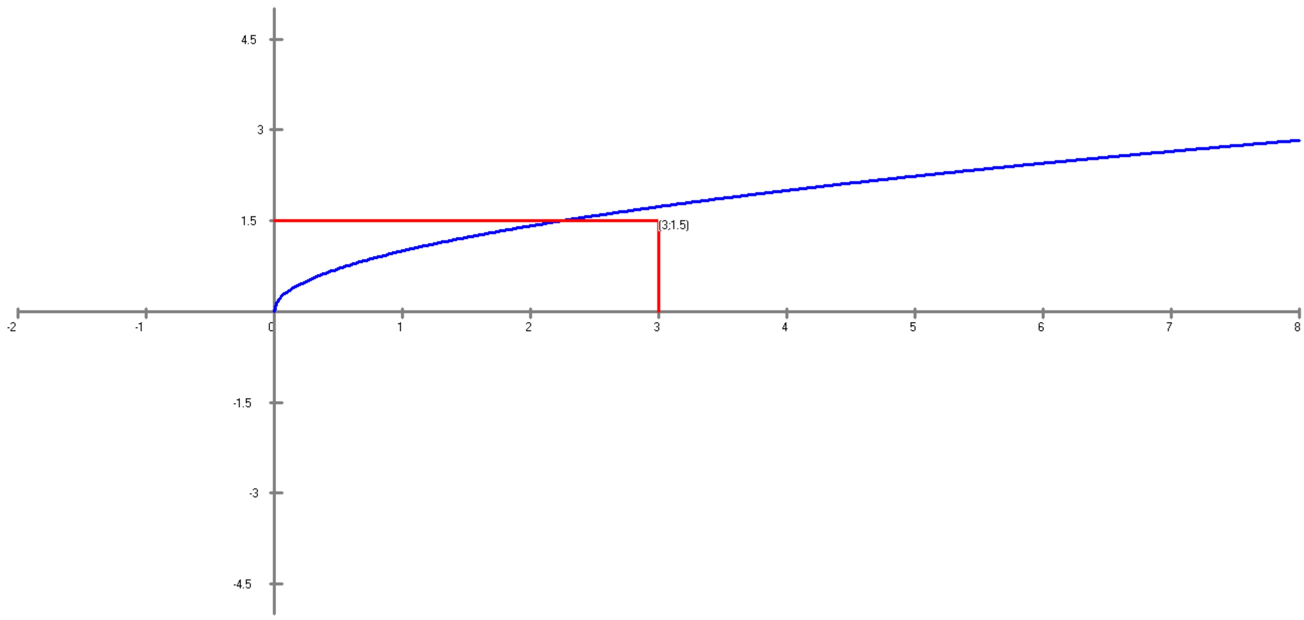
$f(2) = 2^2 - 4 = 0$, por lo tanto como $f(2) = 0 < 1$, el punto (2,1) está por encima de la gráfica de *f*.



4.9 Si f es la función $f(x)=\sqrt{x}$ definida en $(0,\infty)$, el punto (3, 1.5) está

a) Por encima de la gráfica de f.
b) Por debajo de la gráfica de f.
c) Sobre la gráfica de f.

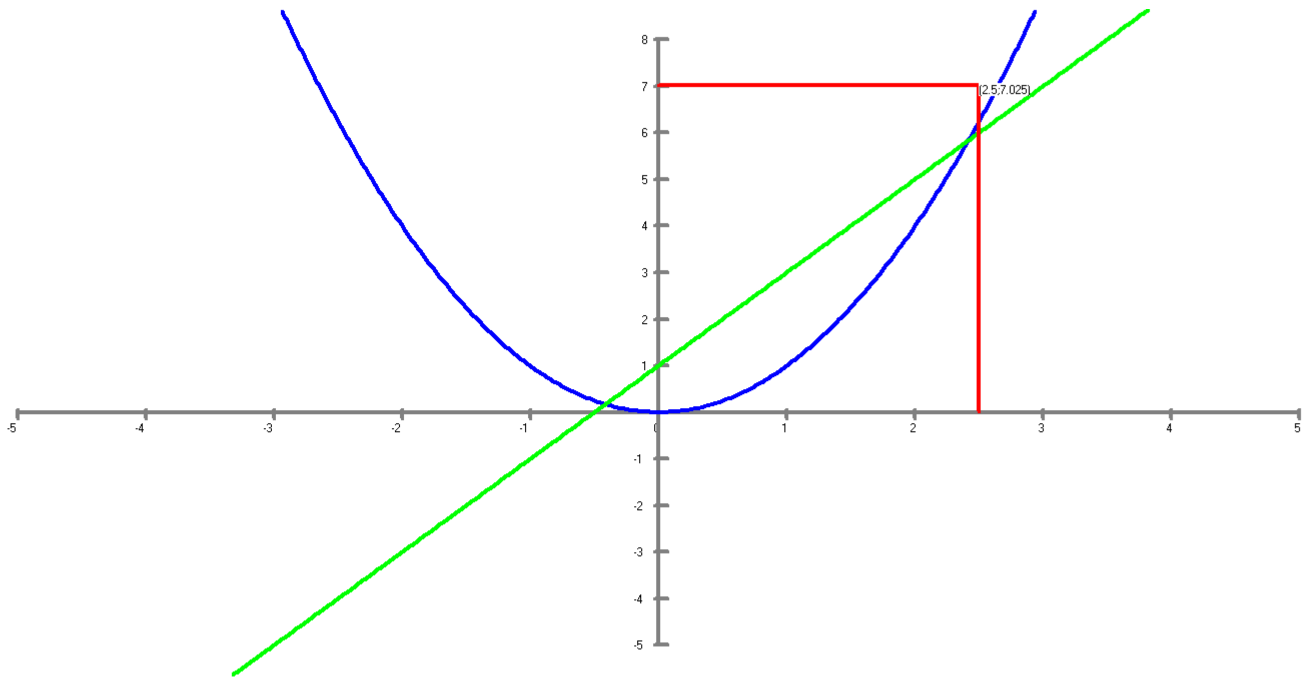
$f(3)=\sqrt{3}$, por lo tanto como $f(3)=\sqrt{3}\approx 1,7320>1,5$, el punto (3, 1.5) está por debajo de la gráfica de f.



4.10 Si f es la función $f(x) = x^2$ definida en $(-\infty, \infty)$, y g es la función $g(x) = 2x + 1$ definida en $(-\infty, \infty)$ el punto (2.5, 7) está

a) Por debajo de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.
b) Por debajo de la gráfica de f y por debajo de la gráfica de g.
c) Por encima de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.

$f(2,5) = 6,25$, por lo tanto como $f(2,5) = 6,25 < 7$, el punto (2.5, 7) está por encima de la gráfica de f.
$g(2,5) = 6$, por lo tanto como $g(2,5) = 6 < 7$, el punto (2.5, 7) está por encima de la gráfica de g.



4.11 Si *f* es creciente en el intervalo $(-3,0)$ se cumple:

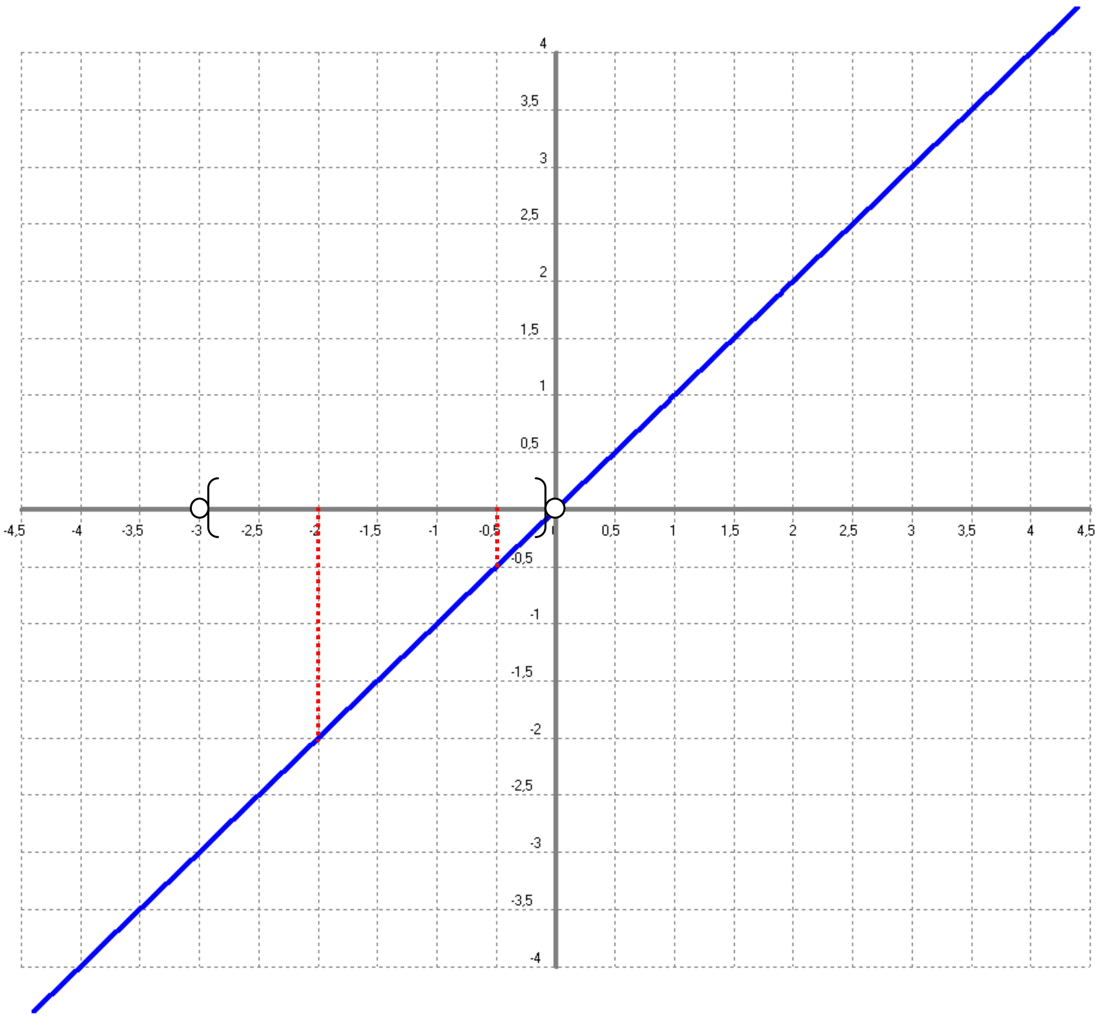
a) $f(-1) \le f(-2)$.
b) $f(-1) \ge f(-1/2)$.
c) $f(-1/2) \ge f(-2)$.

Función creciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$, *f* es creciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \ge f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

Función decreciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye, *f* es decreciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \le f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

$f(-2) = -2$ y $f(-1) = -1$ como **x** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.
$f(-1) = -1$ y $f(-1/2) = -1/2$, **x** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.
$f(-2) = -2$ y $f(-1/2) = -1/2$ como **x** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.

En la función $f(x) = x$ vemos que en el intervalo (-3,0) es creciente y por lo tanto $f(-1/2) \ge f(-2)$



4.12 Si *f* es creciente en el intervalo $(-4,1)$ no puede ser:

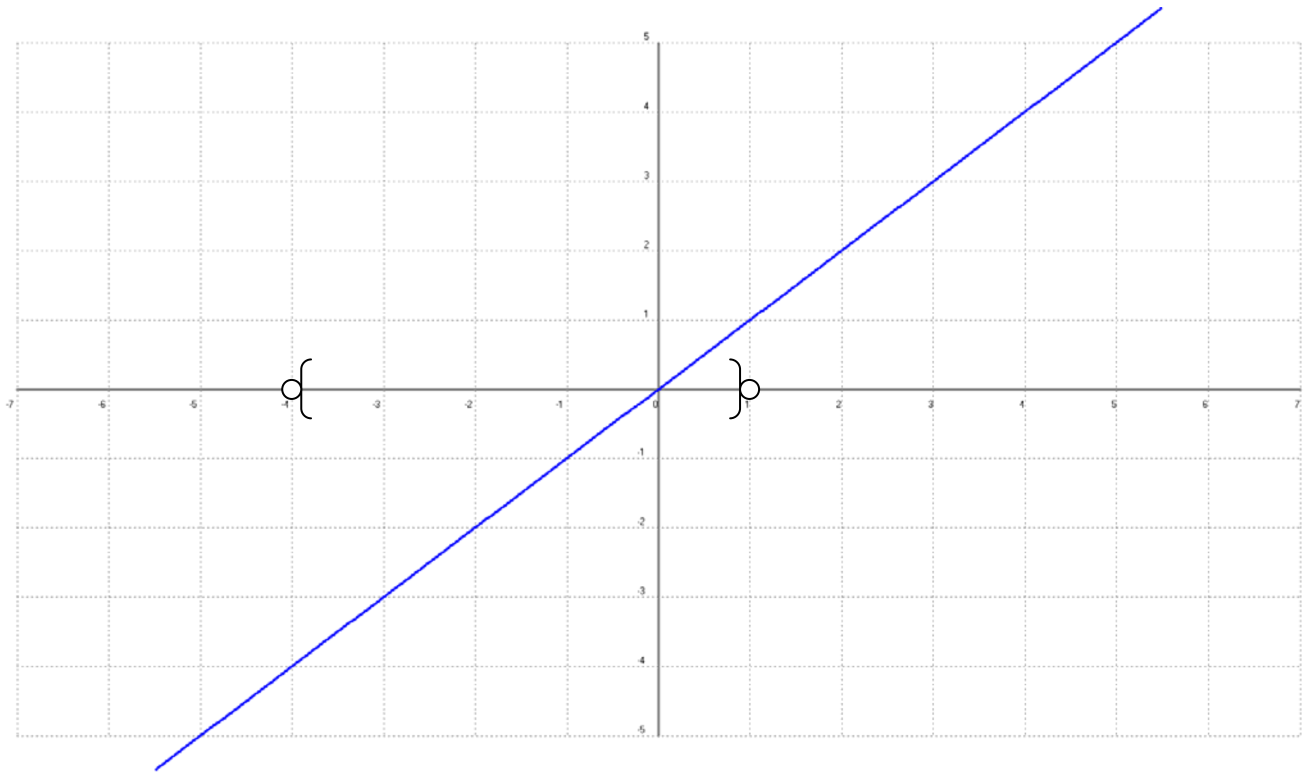
a) $f(-3) > f(-1)$.
b) $f(1/2) > f(-1/2)$.
c) $f(-3) = f(-2)$.

Función creciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$, *f* es creciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

Función decreciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye, *f* es decreciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

$f(-3) = -3$ y $f(-1) = -1$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.
$f(-1/2) = -1/2$ y $f(1/2) = 1/2$, como ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.
$f(-3) = -3$ y $f(-2) = -2$ como ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.

En la función $f(x) = x$ vemos que en el intervalo (-4,1) es creciente y por lo tanto $f(-3) < f(-1)$



4.13 Si *f* es decreciente en el intervalo $(-2,2)$ tiene que ser:

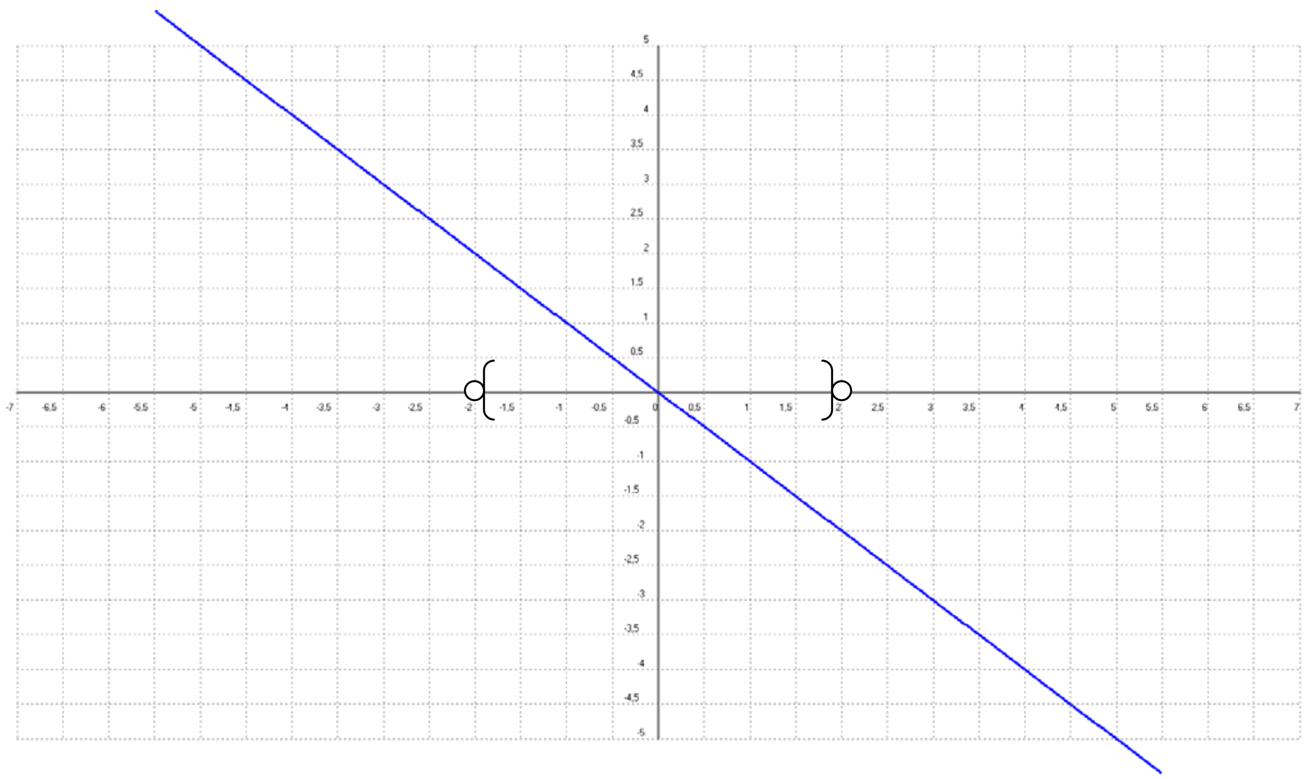
a) $f(-1) \le f(0)$.
b) $f(-3/2) \ge f(-1/2)$.
c) $f(-1/2) \le f(1/2)$.

Función creciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$, *f* es creciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \ge f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

Función decreciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye, *f* es decreciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \le f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

$f(-1) = 1$ y $f(0) = 0$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.
$f(-3/2) = 3/2$ y $f(-1/2) = 1/2$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.
$f(-1/2) = 1/2$ y $f(1/2) = -1/2$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.

La función $f(x) = -x$ vemos que en el intervalo (-2,2) es decreciente y por lo tanto $f(-3/2) \ge f(-1/2)$



4.14 Si *f* es decreciente en el intervalo (-3,1) no puede ser:

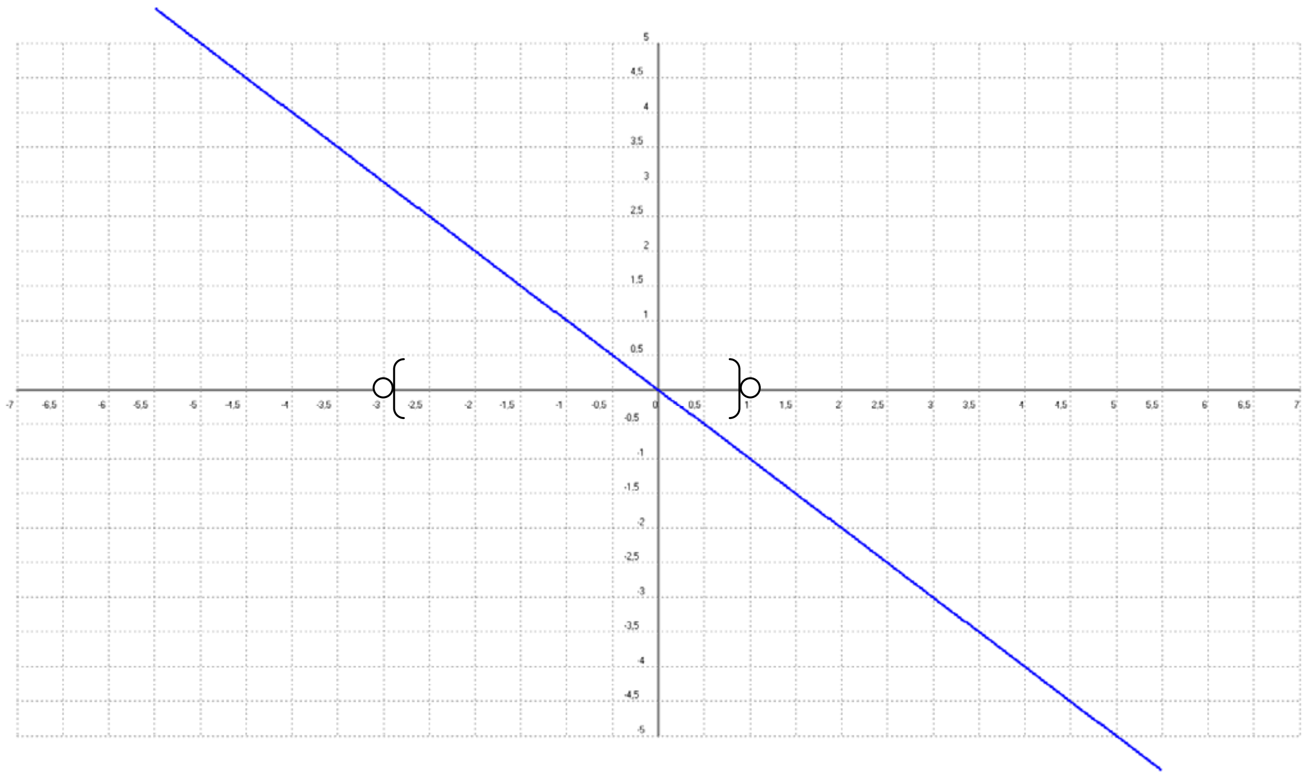
a) $f(-4/3) < f(-2/3)$.
b) $f(-4/3) < f(-5/3)$.
c) $f(-7/3) = f(-4/3)$.

Función creciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$, *f* es creciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

Función decreciente, cuando ***x*** aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye, *f* es decreciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y x_1, x_2 pertenecen al intervalo.

$f(-4/3) = 4/3$ y $f(-2/3) = 2/3$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.
$f(-5/3) = 5/3$ y $f(-4/3) = 4/3$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.
$f(-7/3) = 7/3$ y $f(-4/3) = 4/3$, ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.

La función $f(x) = -x$ vemos que en el intervalo (-3,1) es decreciente y por lo tanto $f(-4/3) < f(-2/3)$



$f(-2/3) = -0,\widehat{6}$
$f(-4/3) = -1,\widehat{3}$
$f(-5/3) = -1,\widehat{6}$
$f(-7/3) = -2,\widehat{3}$

4.15 La función $f(x)=x^2$ es:

a) Creciente en el ***intervalo*** (-2,-1).
b) Creciente en el ***intervalo*** (2,3).
c) Decreciente en el ***intervalo*** (1,2).

Función creciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$, *f* es creciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1)\geq f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$ y x_1,x_2 pertenecen al intervalo.

Función decreciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye, *f* es decreciente en el intervalo si se verifica: $f(x_1)\leq f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$ y x_1,x_2 pertenecen al intervalo.

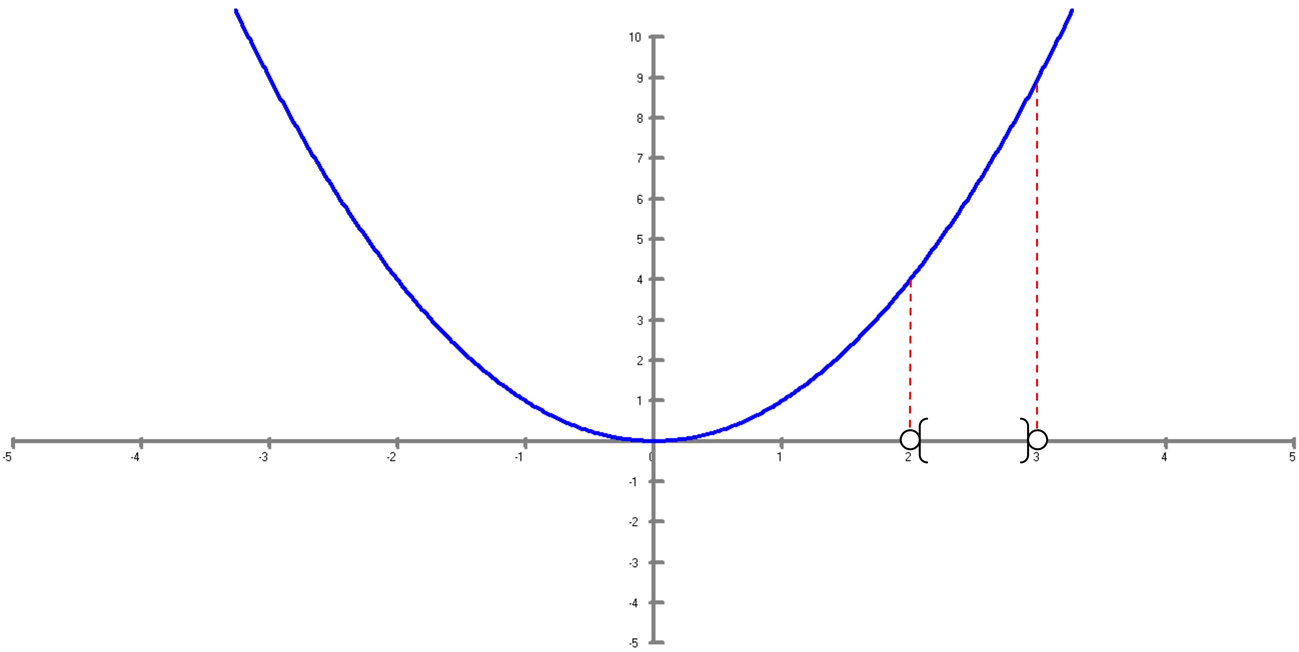
$f(-2)=4$ y $f(-1)=1$ como ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ disminuye, la función decrece.
$f(2)=4$ y $f(3)=9$ como ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.
$f(1)=1$ y $f(2)=4$ como ***x*** aumenta dentro del intervalo y $f(x)$ aumenta, la función crece.

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\leq 0$.

$f'(x)=2x$

$f'(-2)=-4<0$ $f'(-1)=-2<0$ Como -4 y -2 son menores que 0, en este intervalo la función ***decrece***.
$f'(2)=4>0$ $f'(3)=6>0$ Como 4 y 6 son mayores que 0, en este intervalo la función ***crece***.
$f'(1)=2>0$ $f'(2)=4>0$ Como 2 y 4 son mayores que 0, en este intervalo la función ***crece***.



4.16 El límite de $\lim_{x \to -1} f(x) = x^2 + x - 1$ es:

a) 0.
b) -1.
c) 3.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = x^2 + x - 1 = (-1)^2 - 1 - 1 = -1$$

4.17 El límite de $\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{x-1}$ es:

a) 1.
b) -1.
c) No existe.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1$$

4.18 Si f tiene un mínimo relativo en $x=0$ y existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, se verifica:

d) $\lim_{x\to 0} f(x) > f(0)$.

e) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

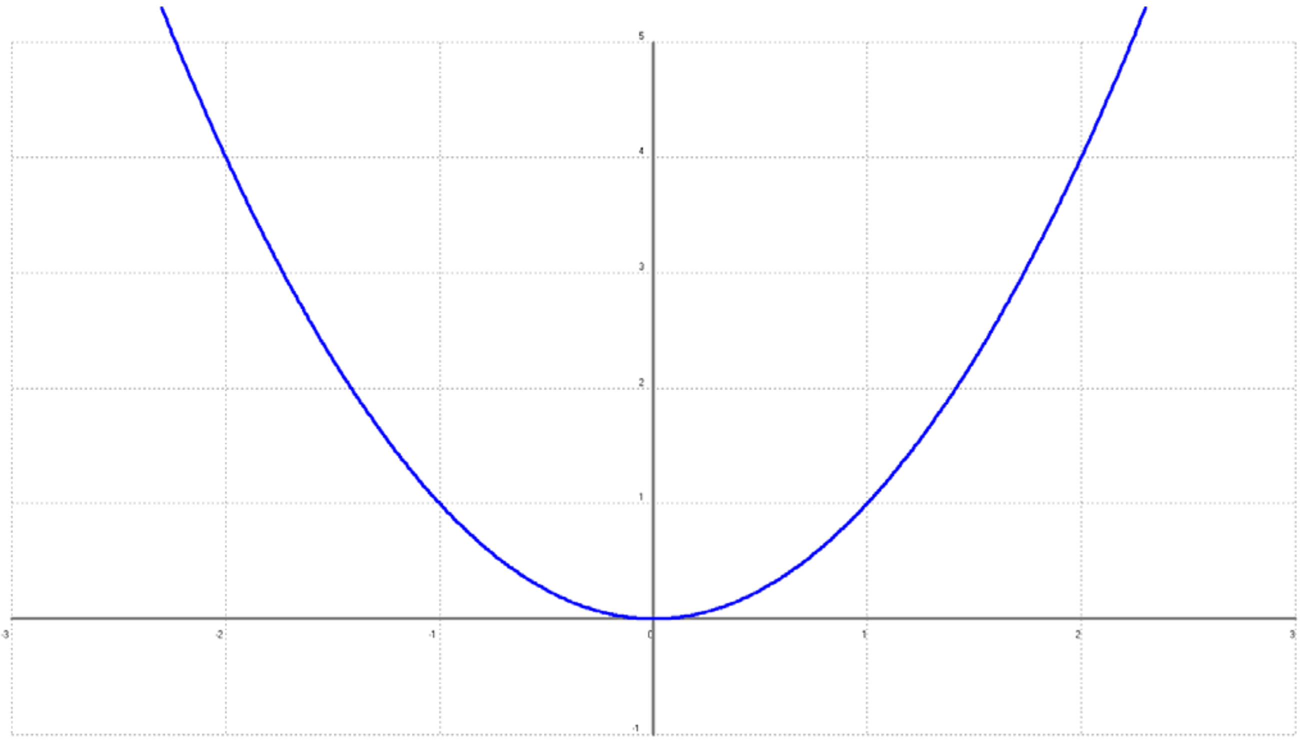
f) $\lim_{x\to 0} f(x) \geq f(0)$.

Como $f(x) \geq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, tiene que ser $\lim_{x\to 0} f(x) \geq \lim_{x\to 0} f(0) = f(0)$

La función $f(x) = x^2$, tiene un mínimo relativo en $x=0$ y existe $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

Como podemos ver en la gráfica la función siempre será mayor o igual que cero a medida que nos aproximamos a cero.

Como $x^2 \geq f(0)$ en algún intervalo $(-3,3)$ alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, tiene que ser $\lim_{x\to 0} x^2 \geq \lim_{x\to 0} 0 = 0$



4.19 Si f tiene un máximo relativo en $x=0$ y existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, se verifica:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \leq f(0)$.

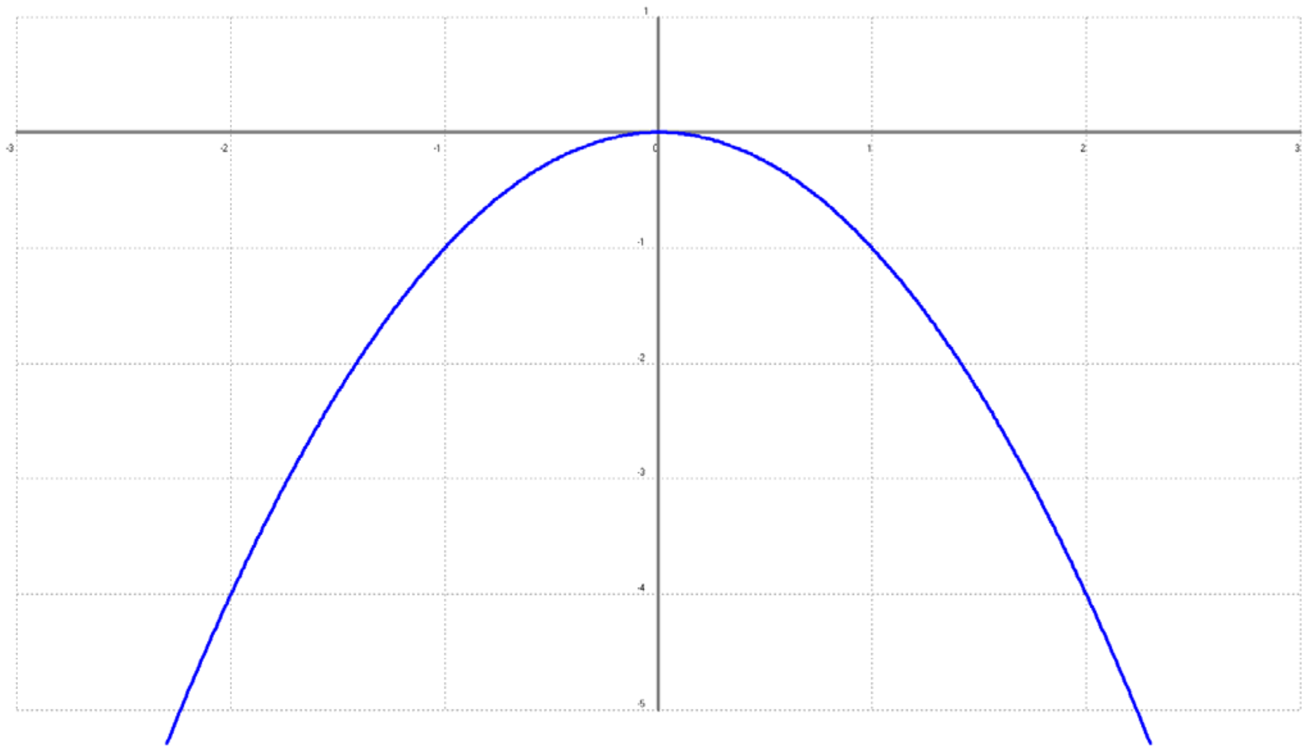
b) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

c) $\lim_{x\to 0} f(x) < f(0)$.

Como $f(x) \leq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, tiene que ser $\lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} f(0) = f(0)$

Como podemos ver en la gráfica la función siempre será menor o igual que cero a medida que nos aproximamos a cero.

Como $x^2 \leq f(0)$ en algún intervalo $(-3,3)$ alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, tiene que ser $\lim_{x\to 0} x^2 \leq \lim_{x\to 0} 0 = 0$



4.20 La función $f(x)=(x-1)^2$:

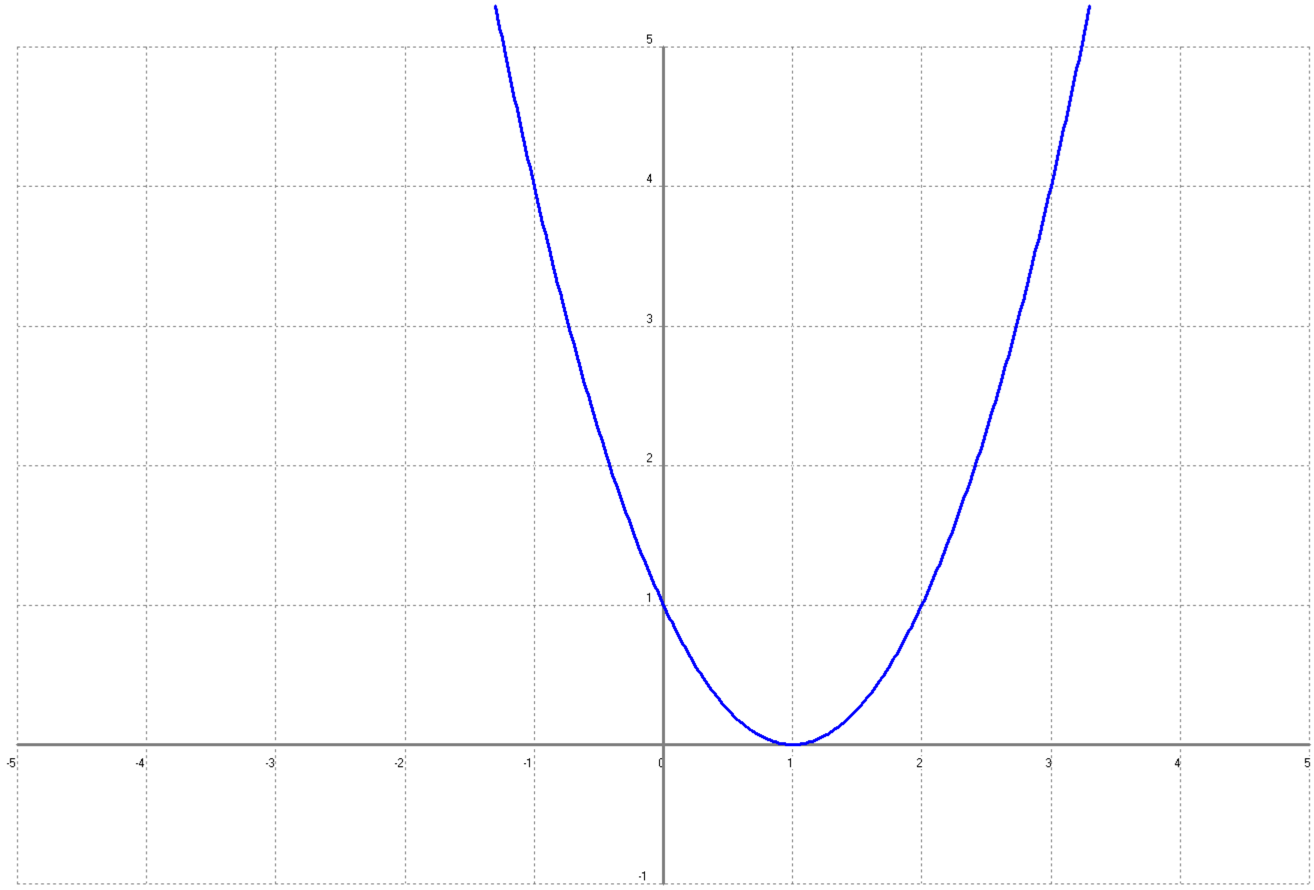
a) Es continua en $x = 1$ y $x = 2$.
b) Es discontinua en $x = 1$ y continua en $x = 2$.
c) Es discontinua en $x = 1$ y $x = 2$.

Una función *f* es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Tanto si el límite no existe como si no coincide con $f(x_0)$ la función *f* es discontinua o tiene una discontinuidad en x_0.

$\lim_{x\to 1} f(x)=(x-1)^2=0$, Además $f(1)=0$ y coincide con el valor del límite en 1 que es 0.

$\lim_{x\to 2} f(x)=(x-1)^2=1$, Además $f(2)=1$ y coincide con el valor del límite en 2 que es 1.



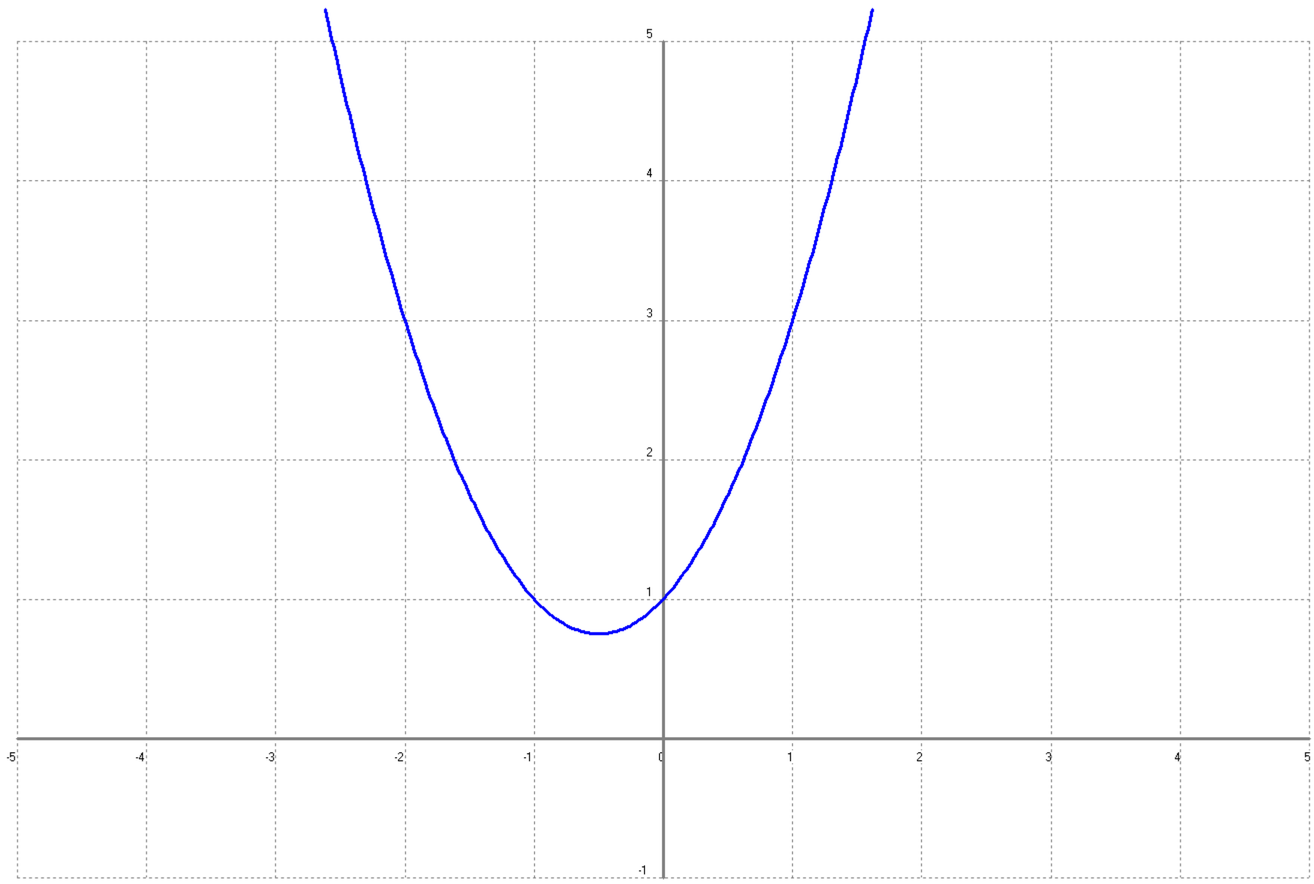
4.21 La función $f(x)=x^2+x+1$:

a) Es continua en todos sus puntos.
b) Es discontinua en $x = 0$.
c) Es discontinua en $x = 1$.

Una función *f* es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Tanto si el límite no existe como si no coincide con $f(x_0)$ la función *f* es discontinua o tiene una discontinuidad en x_0.

$\lim_{x\to 0} f(x)=x^2+x+1=1$, Además $f(0)=1$ y coincide con el valor del límite en 0 que es 1.
$\lim_{x\to 1} f(x)=x^2+x+1=3$, Además $f(1)=3$ y coincide con el valor del límite en 1 que es 3.



4.22 La función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

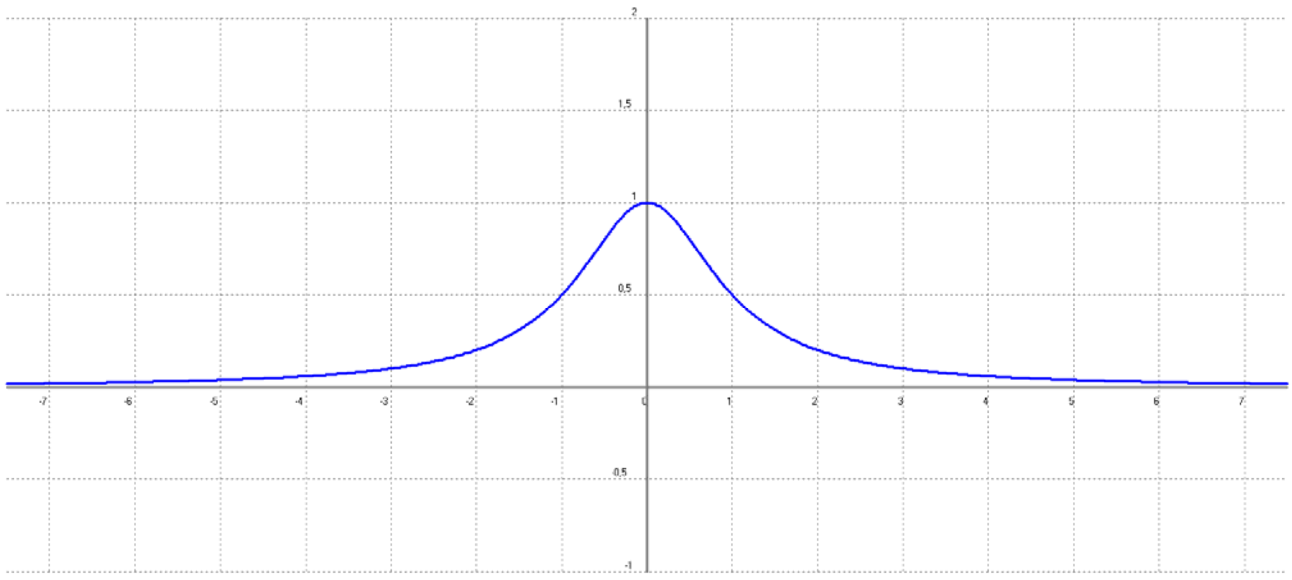
a) ***Es continua en todos los puntos.***
b) Es discontinua en $x=0$.
c) Es discontinua en $x=-1$.

Una función *f* es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Tanto si el límite no existe como si no coincide con $f(x_0)$ la función *f* es discontinua o tiene una discontinuidad en x_0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1$, Además $f(0)=1$ y coincide con el valor del límite en 1 que es 1.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}$, Además $f(-1)=\dfrac{1}{2}$ y coincide con el valor del límite en -1 que es $\dfrac{1}{2}$.



4.23 La función definida como $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$ para $x\neq 1$ y $f(1)=c$.

g) Tiene una discontinuidad en $x = 1$, independientemente del valor de c.
h) Es continua en x = 1 si $c=2$**.**
i) Es continua en $x = 1$ si $c=0$.

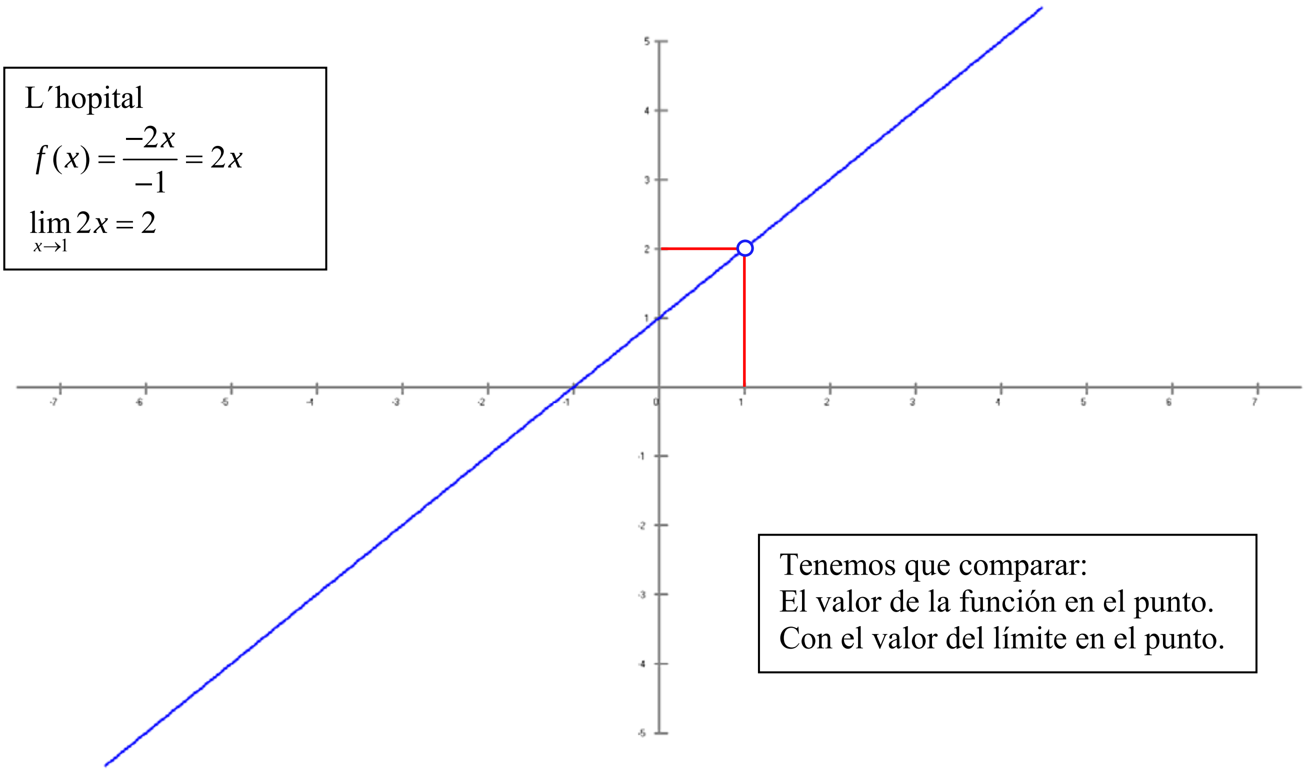
Una función *f* es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Tanto si el límite no existe como si no coincide con $f(x_0)$ la función *f* es discontinua o tiene una discontinuidad en x_0.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1-x}=1+x$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1+x=2$ Además $f(1)=2$ y coincide con el valor del límite en 1 que es 2.

L´hopital
$f(x)=\dfrac{-2x}{-1}=2x$
$\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$



Una función ***f(x)*** es continua en el punto ***a*** si cumple:

1. La función está definida en ***a***, es decir existe ***f(a)***
2. Tiene límite en el punto ***a***
3. El límite es igual al valor de la función en el punto ***a*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Si falla alguna de estas condiciones, la función no es continua en el punto ***a***, diremos que es discontinua en ***a***, diremos que una función es continua cuando lo es en todos los puntos donde está definida.

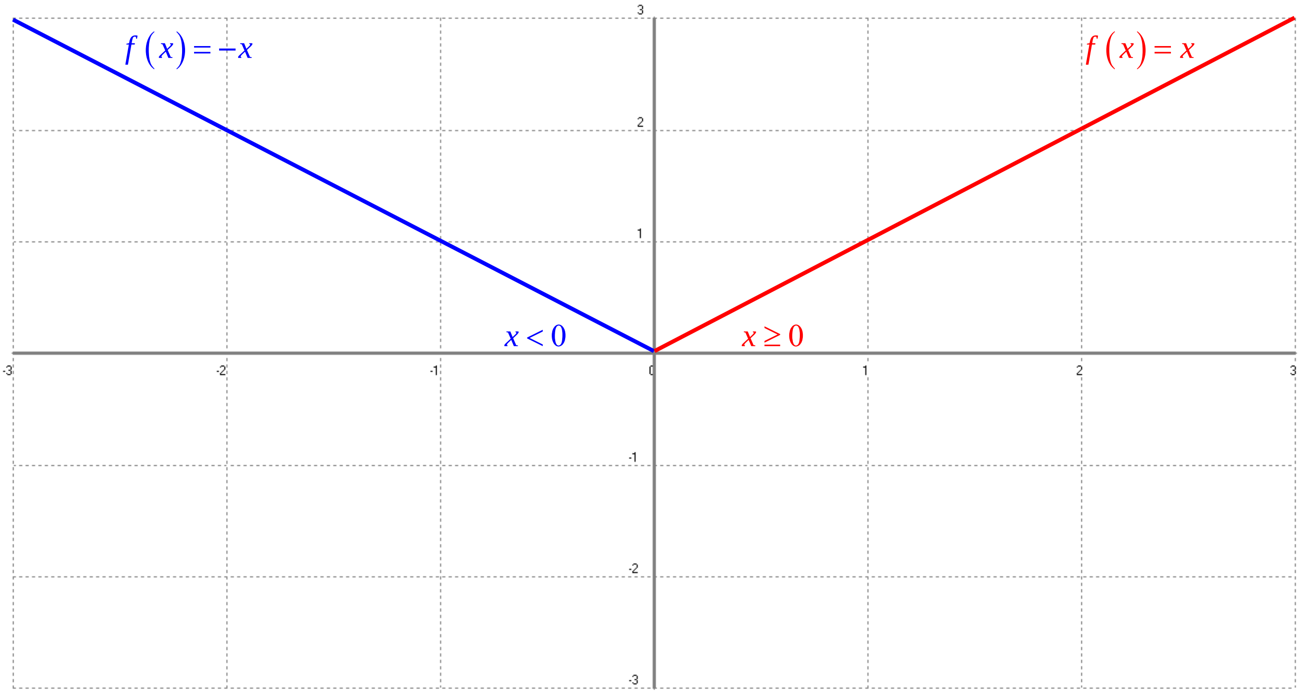
4.24 La función $f(x)=|x|$, que se define como $f(x)=-x$ si $x<0$ y $f(x)=x$ si $x\geq 0$.

a) Es continua en todos los puntos.
b) Tiene una única discontinuidad.
c) Tiene dos discontinuidades.

Hay que estudiar los límites laterales en el punto 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Como se puede ver coinciden los límites laterales por lo tanto es continua en todos sus puntos.



4.25 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Toda función continua en un punto x_0 es derivable en ese punto.
b) ***Toda función derivable en un punto x_0 es continua en ese punto***.
c) Algunas funciones derivables en un punto x_0 no son continuas en ese punto.

Hay funciones continuas en un punto que no son derivables, por ejemplo, la función $f(x)=|x|$, que se define

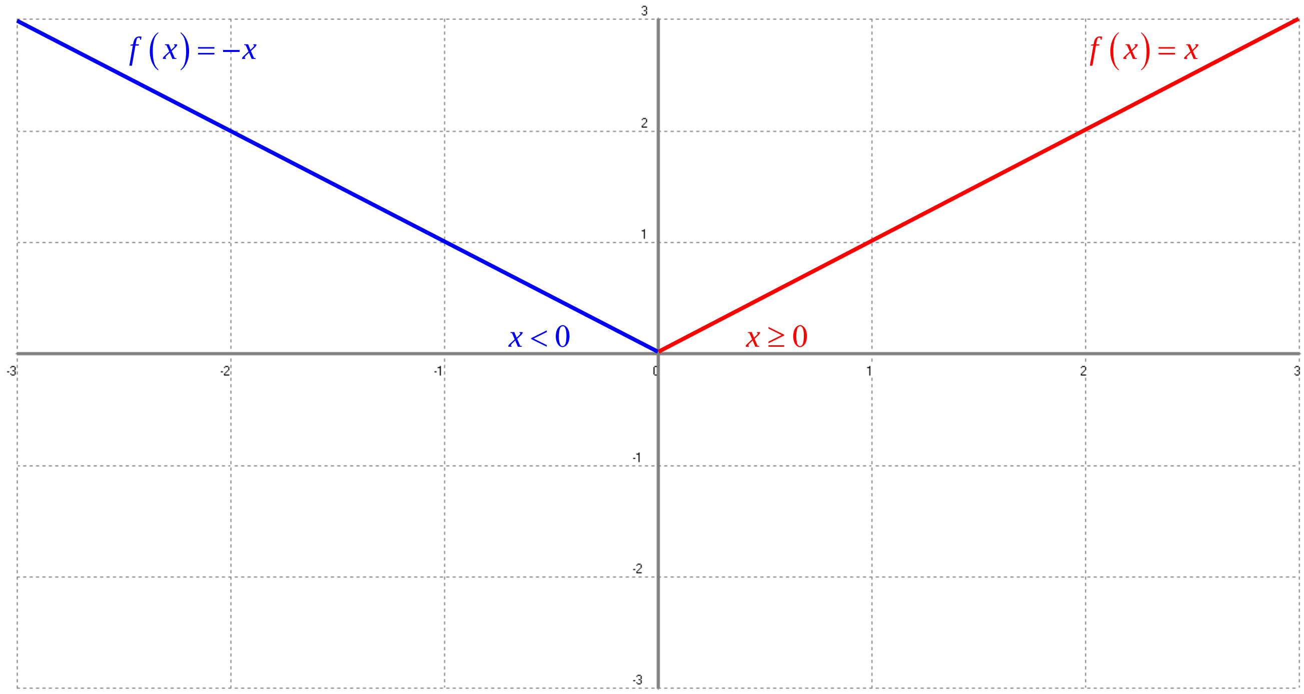
$$f(x)=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

Es continua en $x_0=0$, pero no es derivable en ese punto.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$, Además $f(0)=0$ y coincide con el valor del límite en 0 que es 0.
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$, Además $f(0)=0$ y coincide con el valor del límite en 0 que es 0.

Una función f es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Tanto si el límite no existe como si no coincide con $f(x_0)$ la función f es discontinua o tiene una discontinuidad en x_0.



4.26 La función $f(x)=x^2$ tiene derivada

a) $f'(x)=2x^2$.
b) $f'(x)=2x$.
c) $f'(x)=2$.

Solución: $f'(x)=2x$

4.27 La función $f(x)=x^3+x$ tiene derivada

a) $f'(x)=3x^3+x$.
b) $f'(x)=3x^2+x$.
c) $f'(x)=3x^2+1$.

Solución: $f'(x)=3x^2+1$

4.28 La función $f(x)=\sqrt{x}$ tiene derivada

a) $f'(x)=2\sqrt{x}$.
b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.
c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solución: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4.29 La función $f(x)=(2-3x)^3$ tiene derivada

a) $f'(x)=3\cdot(2-3x)^2$.
b) $f'(x)=-9\cdot(2-3x)^2$.
c) $f'(x)=-6\cdot(2-3x)^2$.

Solución: $f'(x)=3\cdot(2-3x)^2\cdot(-3)=-9\cdot(2-3x)^2$

4.30 Para $x\neq 0$ La función $f(x)=3/x$ tiene derivada

a) $f'(x)=-3/x^2$.
b) $f'(x)=3/x^2$.
c) $f'(x)=2/x^3$.

Solución: $f'(x)=\dfrac{0\cdot x-(3)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{-3}{x^2}$

4.31 La función $f(x)=(x+1)\cdot(x^2+1)$ tiene derivada

a) $f'(x)=3x^2+2x+1$.
b) $f'(x)=x^2+2x+1$.
c) $f'(x)=2x^2+2x+1$.

Solución: $f'(x)=1\cdot(x^2+1)+(x+1)\cdot 2x=x^2+1+2x^2+2x=3x^2+2x+1$

4.32 La derivada de la función $f(x)=x^3-x^2$ en el punto $x=3$, es igual a:

a) 27.
b) 1.
c) 21.

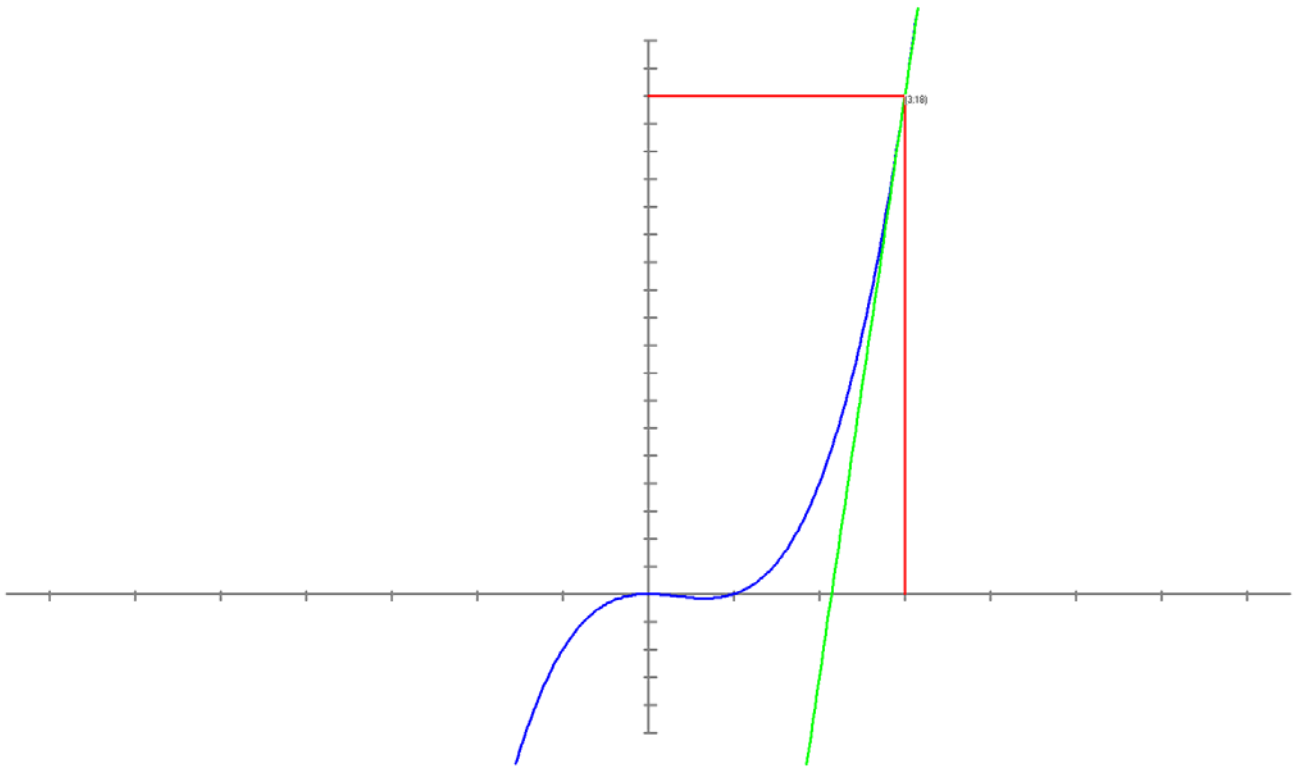
$$f'(x)=3x^2-2x$$
$$f'(3)=3\cdot(3)^2-2\cdot 3=21$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto (3,18)

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=21\cdot(x-3)+18=21x-45$$



4.33 La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto $x=1$, es igual a:

a) 0.
b) -1.
c) 1/2.

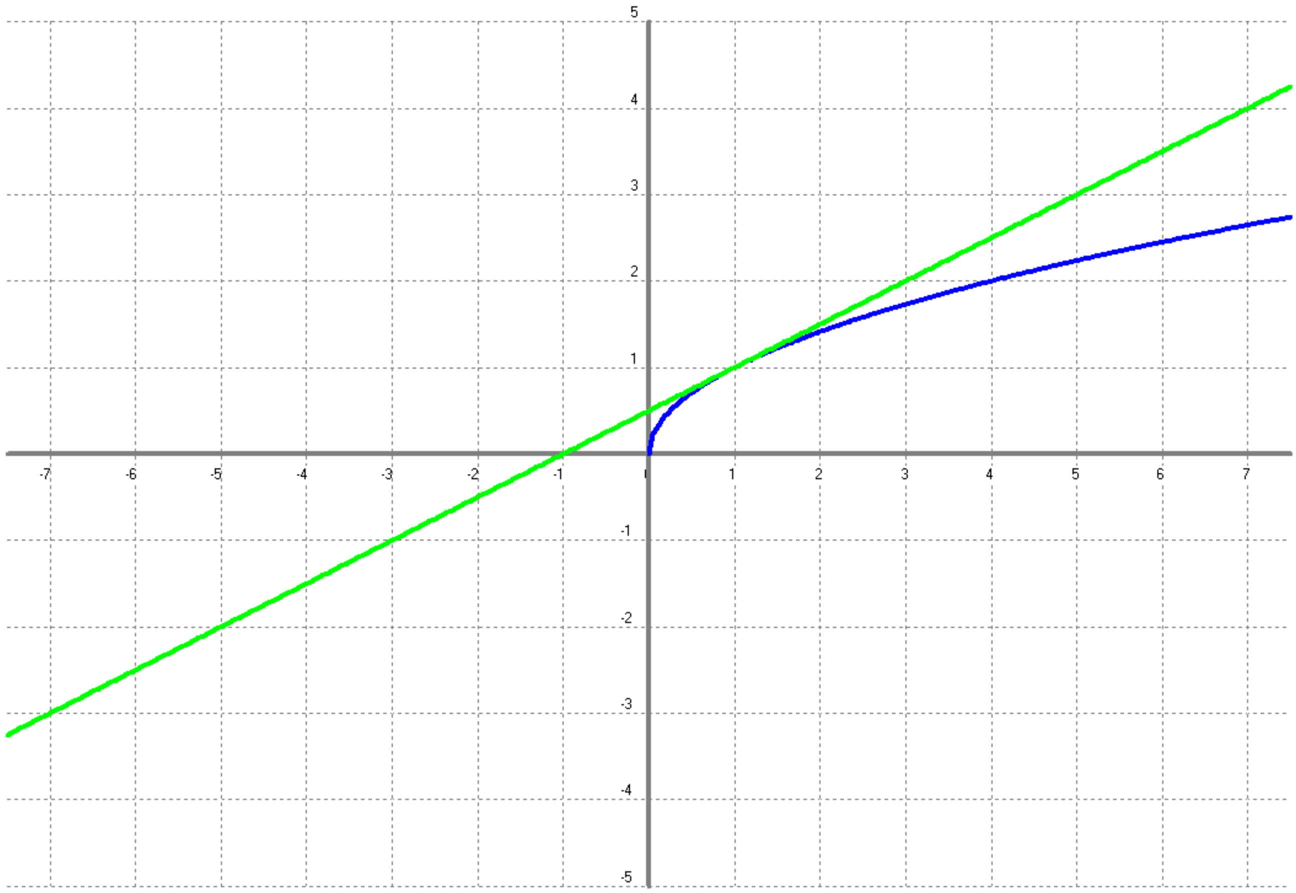
$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$
$$f'(1)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $\left(x_0\left(f\left(x_0\right)\right)\right)$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ y además pasa por el punto $\left(x_0\left(f\left(x_0\right)\right)\right)$.

Punto (1,1)

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=\frac{1}{2}\cdot(x-1)+1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$



4.34 La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}-x$ cumple:

a) $f'(1)=-5/6$.
b) $f'(4)=-3/4$.
c) $f'(9)=-1/2$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-1$$

$$f'(4)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

4.35 La derivada de la función $f(x)=6x^2-(x+1)^3$ no cumple:

a) $f'(0)=-3$.
b) $f'(1)=0$.
c) $f'(-1)=-8$.

$$f'(x)=12x-3\cdot(x+1)^2$$

$$f'(0)=12\cdot 0-3\cdot(0+1)^2=-3$$
$$f'(1)=12\cdot 1-3\cdot(1+1)^2=0$$
$$f'(-1)=12\cdot(-1)-3\cdot(-1+1)^2=-12$$

4.36 La posición de un móvil sobre una recta, el instante *t*, viene dada por la función $f(t)=t^2-t$. La velocidad del móvil en el instante *t* es:

a) $v(t)=2t-1$.
b) $v(t)=2t-2/t$.
c) $v(t)=t^2-t$.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$v(t)=f'(t)=2t-1$.

4.37 La posición de un móvil sobre una recta, el instante *t*, viene dada por la función $f(t)=t^2+t$. La velocidad del móvil en el instante *t=1* es:

a) 1.
b) 2.
c) 3.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$v(t)=f'(t)=2t+1$.

La velocidad en el instante *t* = *1* es: $v(1)=f'(1)=2\cdot 1+1=3$

4.38 La posición de un móvil sobre una recta, el instante *t*, viene dada por la función $f(t)=3t-t^2$. Su posición en el instante en que su velocidad es 0 es:

a) $3/2$.
b) $9/4$.
c) $3/4$.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$v(t)=f'(t)=3-2t$.

La velocidad es igual a 0 en el instante *t* que cumple $3-2t=0$, es decir $t=3/2$.

En ese instante, la posición es $f(3/2)=9/2-9/4=9/4$.

4.39 La posición de un móvil sobre una recta, el instante *t*, viene dada por la función $f(t) = 2t^3 - 3t$. La velocidad del móvil verifica:

a) $v(0) = -3$.
b) $v(1) = -3$.
c) $v(\sqrt{2}) = 8$.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$v(t) = f'(t) = 6t^2 - 3$.

$v(0) = -3$
$v(1) = 3$
$v(\sqrt{2}) = -9$

La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada del espacio respecto al tiempo.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = e'(t)$$

Aceleración instantánea

La aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. $a = v'(t)$

Por tanto, la aceleración es la derivada segunda del espacio respecto al tiempo. $a = e''(t)$

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t) = 3t^2 - t + 1$. El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

Hallar la ecuación de la velocidad. $v(t) = e'(t) = 6t - 1$

Hallar la velocidad en el instante t = 0. $v(0) = e'(t) = 6 \cdot 0 - 1 = -1\ m/s$

Hallar la ecuación de la aceleración. $a(t) = v'(t) = e''(t) = 6\ m/s^2$

4.40 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en el punto de abscisa $x = 1$ vale:

a) -1.
b) 1.
c) 2.

La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función $f(x)$ es igual al valor de la derivada en ese punto.

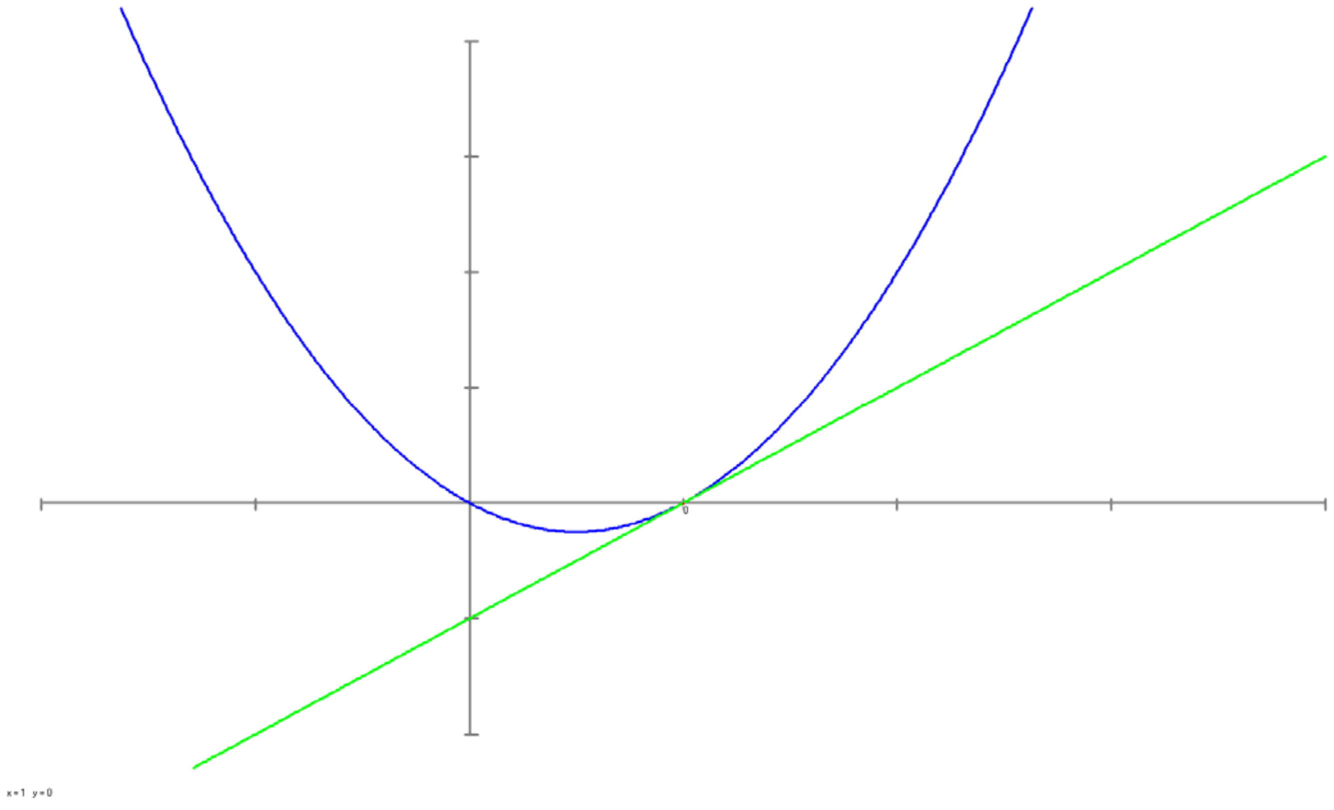
$$f'(x) = 2x - 1$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto (1,0)

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = 1 \cdot (x - 1) + 0 = x - 1$$



4.41 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^3$ en el punto de abscisa $x = -1$ vale:

a) 1.
b) -8.
c) -7.

La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función $f(x)$ es igual al valor de la derivada en ese punto.

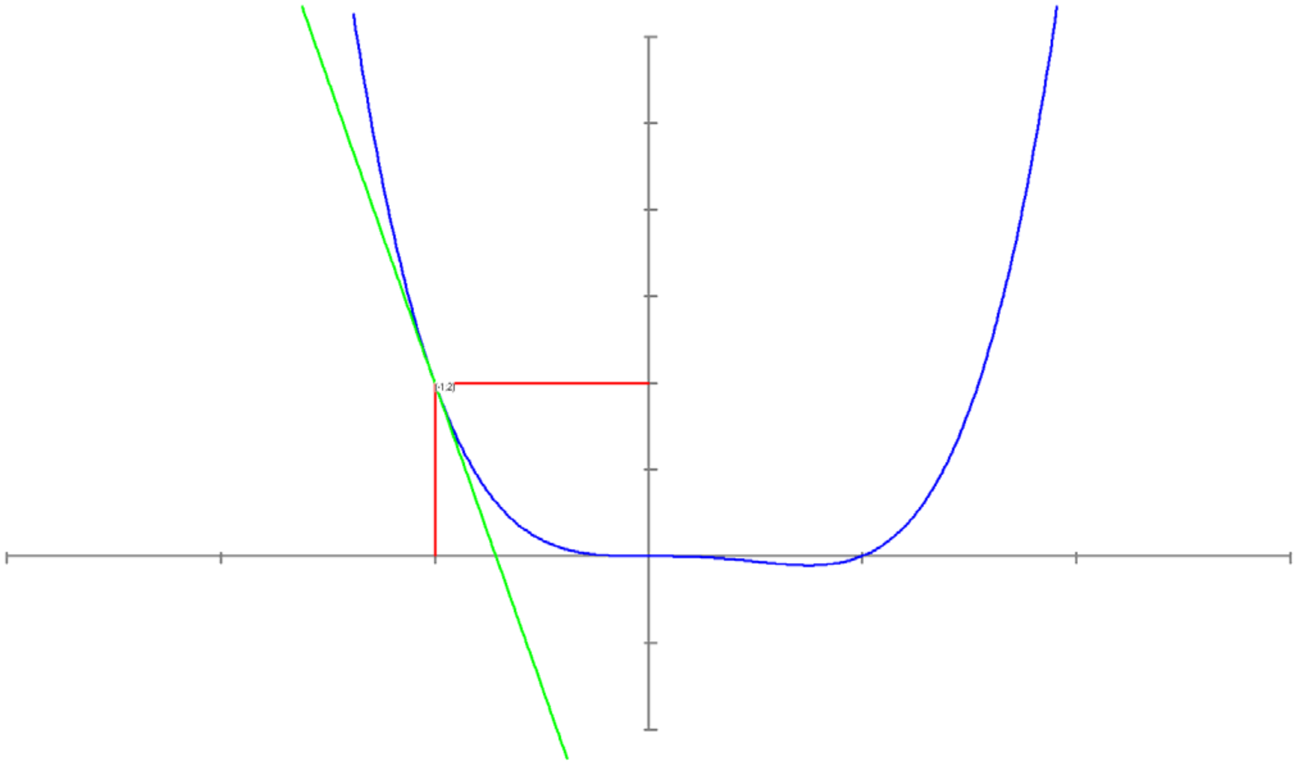
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$
$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1)^2 = -7$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto (-1,2)

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = -7\cdot(x+1) + 2 = -7x - 5$$



4.42 La tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+x+1$ es paralela a la recta $y=2x-3$, en el punto de abscisa:

a) $x=-1/2$.
b) $x=1/2$.
c) $x=-3/2$.

La recta $y=2x-3$, tiene como pendiente 2.

La derivada de la función $f(x)=x^2+x+1$ es:

$f'(x)=2x+1$ Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale 2, resolvemos la ecuación $2x+1=2$

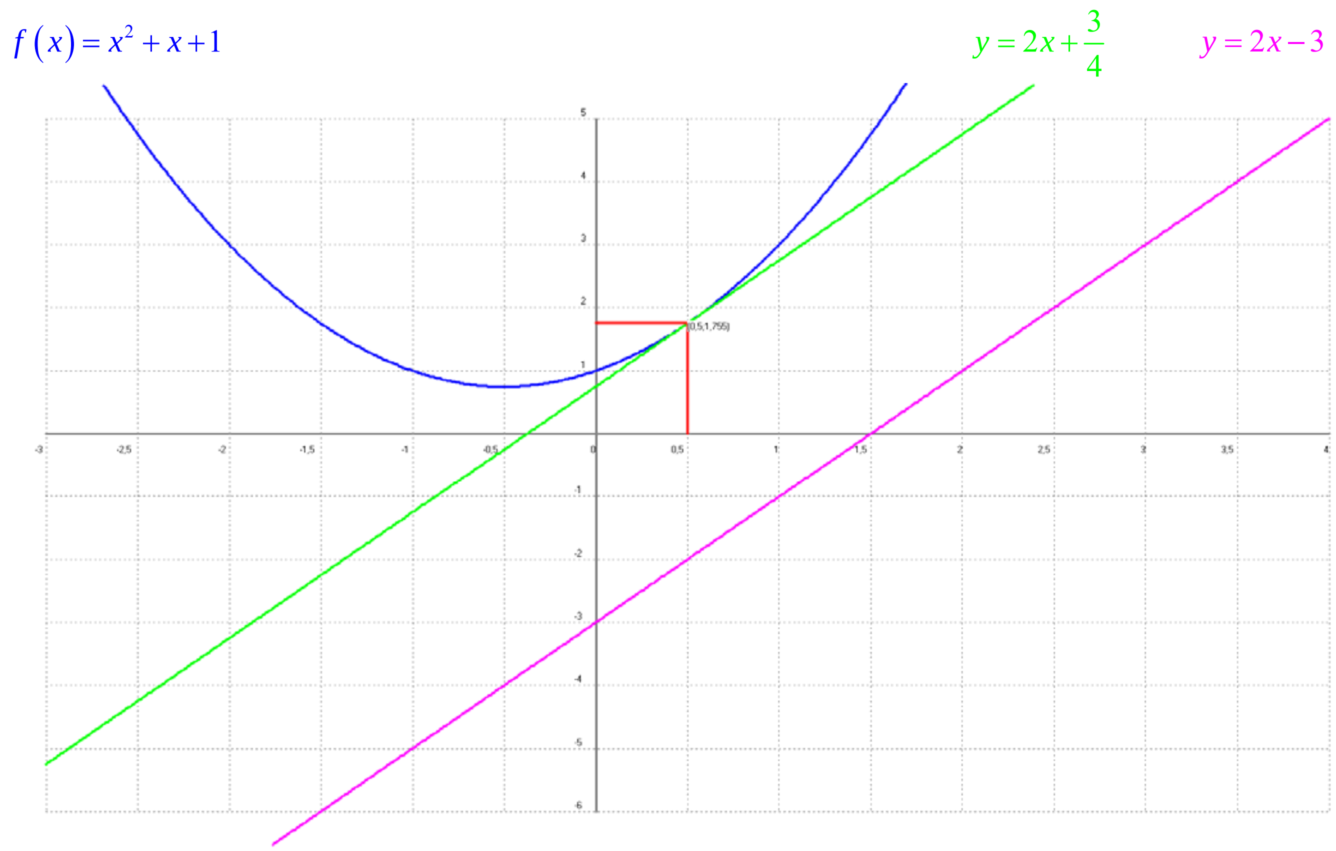
$$2x+1=2$$
$$x=\frac{1}{2}$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto (1/2, 7/4)

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}=2x+\frac{3}{4}$$



4.43 La tangente a la gráfica de la función $f(x)=1-x^2$ es perpendicular a la recta $y=x$, en el punto de abscisa:

a) $x=1/2$.
b) $x=3/2$.
c) $x=-1/2$.

La recta $y=x$, tiene como pendiente 1.

La derivada de la función $f(x)=1-x^2$ es:

$f'(x)=-2x$ Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale -1, resolvemos la ecuación $-2x=-1$

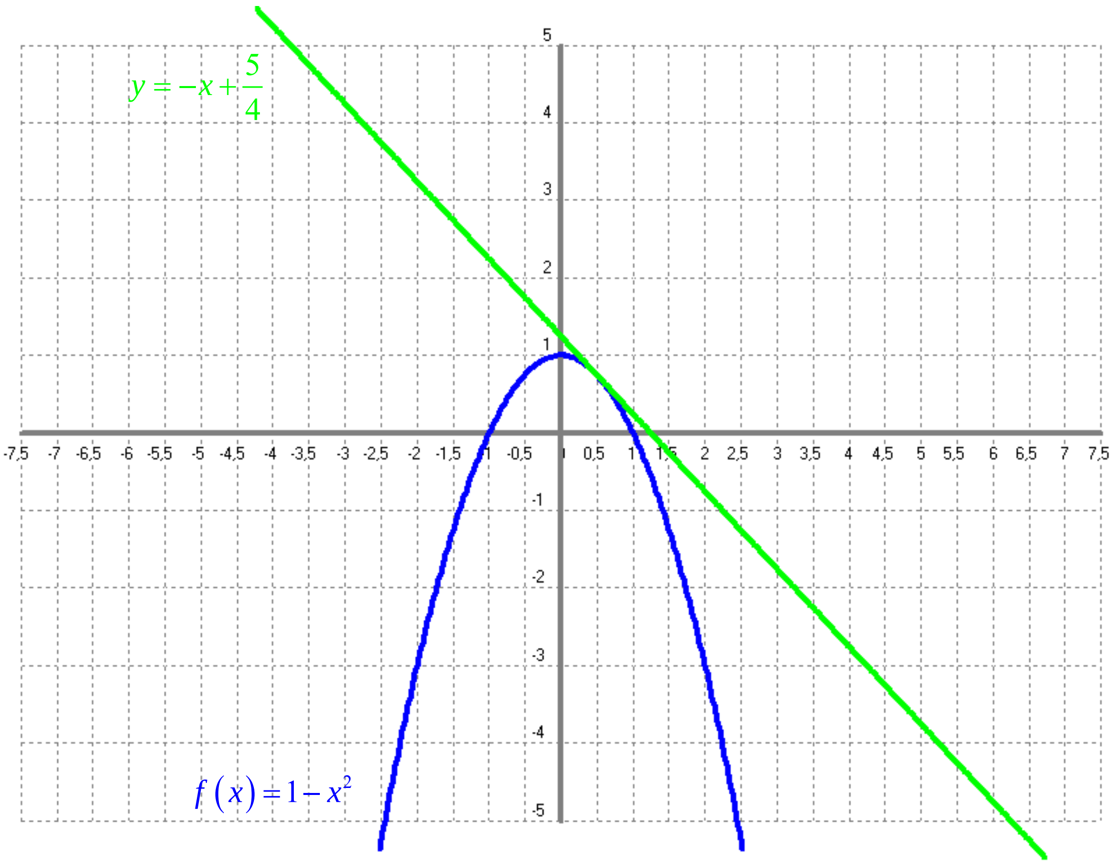
$x=\frac{1}{2}$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto $(1/2,3/4)$

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=-1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}=-x+\frac{5}{4}$$



4.44 La tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^4-2x$ en el punto de abscisa $x=1$ tiene por ecuación:

a) $y=x+2$.
b) $y=2x-3$.
c) $y=3x-1$.

La derivada de la función $f(x)=x^4-2x$ es:

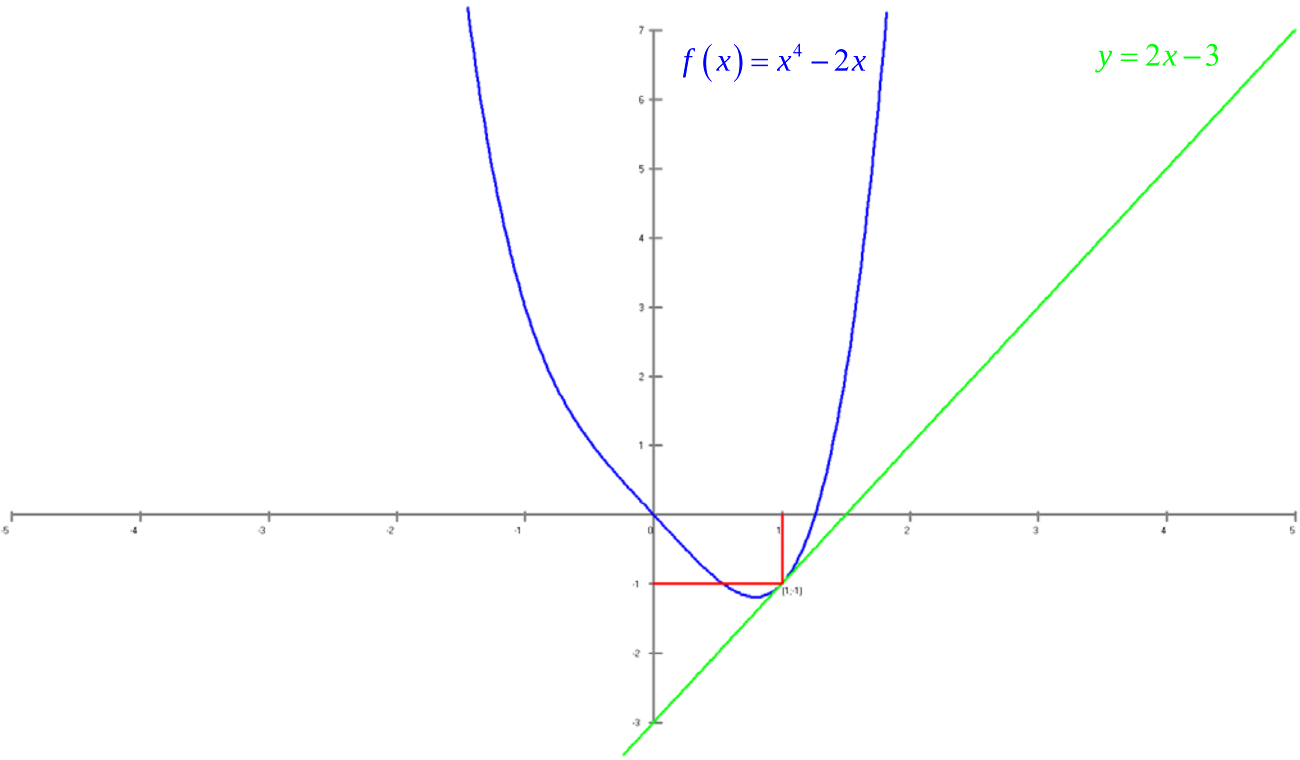
$$f'(x)=4x^3-2$$
$$f'(1)=4\cdot 1^3-2=2$$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(x_0(f(x_0)))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

Punto $(1,-1)$

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y=2\cdot(x-1)-1=2x-3$$



4.45 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=1/x$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, por el punto en que la recta $2x-2y+3=0$ corta a la gráfica de $f(x)$ tiene por ecuación:

a) $4y+x-3=0$.
b) $4y+x-4=0$.
c) $4x+y-4=0$.

Primero calcularemos el punto en que la recta $2x-2y+3=0$ corta a la gráfica de la función y luego trazaremos la tangente a la gráfica por ese punto.
Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=1/x \\ 2x-2y+3=0 \end{cases} \qquad 2x-2\cdot\frac{1}{x}+3=0 \qquad 2x-2+3x=0 \qquad \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} \quad \begin{cases} x=1/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

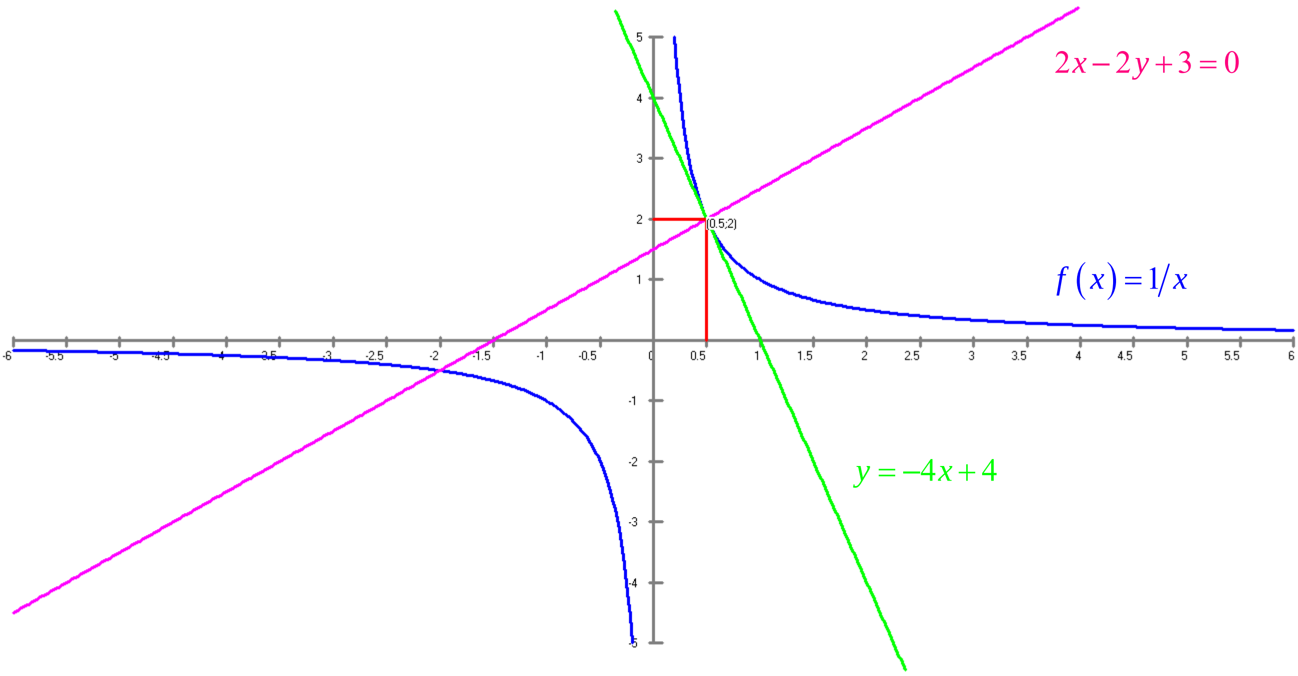
Como el intervalo de definición es $(0,\infty)$, comprobamos el punto de corte $x=1/2$, $f(1/2)=\frac{1}{1/2}=2$

El punto de corte es $(1/2,2)$.

La derivada de la función $f(x)=1/x$ es $f'(x)=-1/x^2$

La pendiente de la tangente es $f'(1/2)=-1/(1/2)^2=-4$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\rightarrow 4x+y-4=0$



4.46 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=1/x$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, que es paralela a la recta $9x+y=0$ tiene por ecuación:

a) $9x+y-3=0$.
b) $9x+y-6=0$.
c) $9x+y-9=0$.

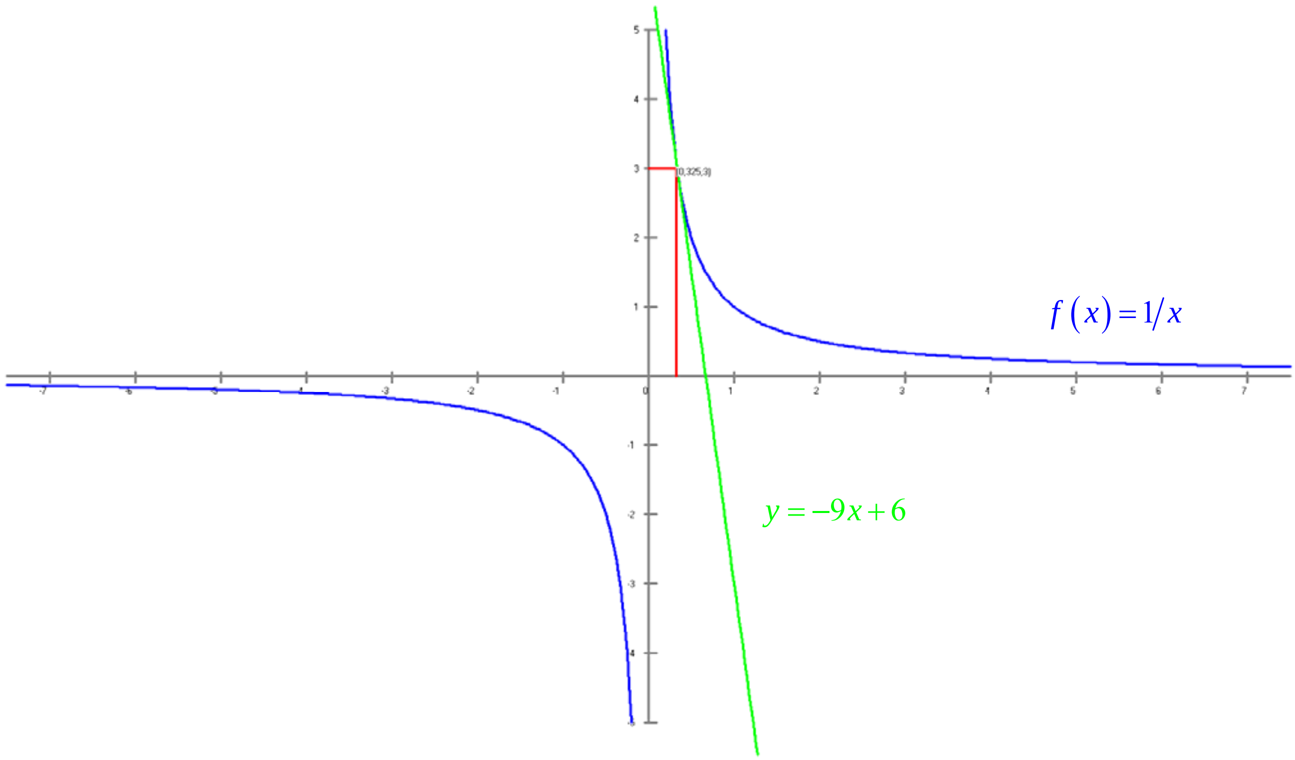
La recta $9x+y=0$ tiene pendiente igual a -9.

Para hallar en qué punto la pendiente de la tangente a la gráfica tiene esa misma pendiente, hacemos:

La derivada de la función $f(x)=1/x$ es $f'(x)=-1/x^2=-9 \rightarrow x=1/3$

Y el punto tiene coordenadas $(1/3,3)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=-9\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\rightarrow 9x+y-6=0$



4.47 Si la tangente a la gráfica de la función $f(x)$, en el punto de abscisa $x=2$, tiene por ecuación $3x-2y+4=0$ se verifica:

a) $f(2)=5$ y $f'(2)=1/2$.
b) $f(2)=5$ y $f'(2)=3/2$.
c) $f(2)=-5$ y $f'(2)=-3/2$.

La abscisa del punto de tangencia es $x=2$.

La ecuación de la recta tangente: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

El valor de $f'(2)$ es igual a la pendiente de la recta tangente $f'(2)=3/2$

$$y-f(2)=\frac{3}{2}\cdot(x-2)$$
$$3x-2y-6+2f(2)=0$$
$$-6+2f(2)=4$$
$$f(2)=5$$

4.48 La función $f(x) = 1/x$, definida para $x \neq 0$, es:

a) Decreciente en el intervalo $[1,2]$.
b) Creciente en el intervalo $[-2,-1]$.
c) Creciente en el intervalo $[1,2]$.

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

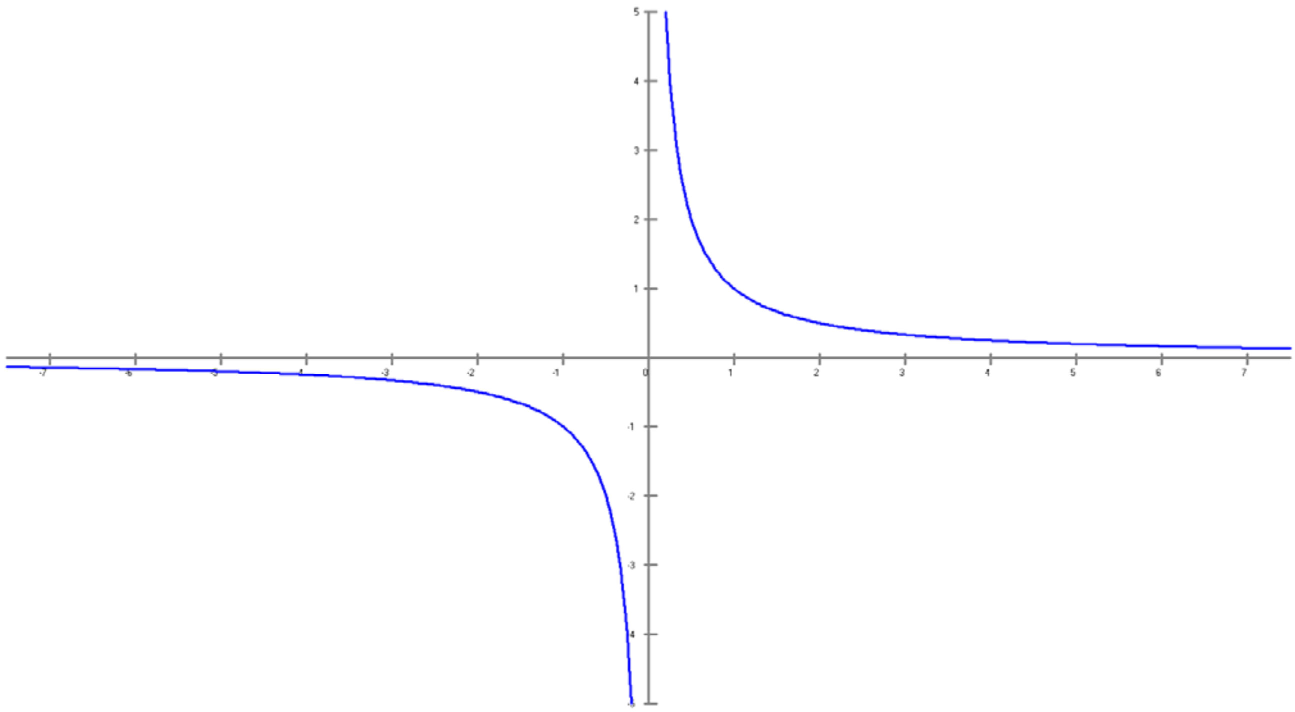
- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

La derivada de la función $f(x) = 1/x$ es $f'(x) = -1/x^2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = -1/1^2 = -1 \\ f'(2) = -1/2^2 = -0,25 \end{array}\right\} f' \leq 0 \text{ } \textbf{Intervalos de decrecimiento}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2) = -1/(-2)^2 = -0,25 \\ f'(-1) = -1/(-1)^2 = -1 \end{array}\right\} f' \leq 0 \text{ } \textbf{Intervalos de decrecimiento}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = -1/1^2 = -1 \\ f'(2) = -1/2^2 = -0,25 \end{array}\right\} f' \leq 0 \text{ } \textbf{Intervalos de decrecimiento}$$



4.49 La derivada segunda de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ es igual a:

a) $3x - 1$.
b) $6x - 2$.
c) $3x^2 - 2x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

4.50 La derivada segunda de la función $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$ vale:

a) $-1/2$.
b) $-1/4$.
c) $1/8$.

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = 0 - \frac{0 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{8}$$

4.51 La función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tiene un mínimo relativo en:

a) $x = 2$.
b) $x = 3/2$.
c) $x = -1/2$.

$f'(x) = 2x - 3$

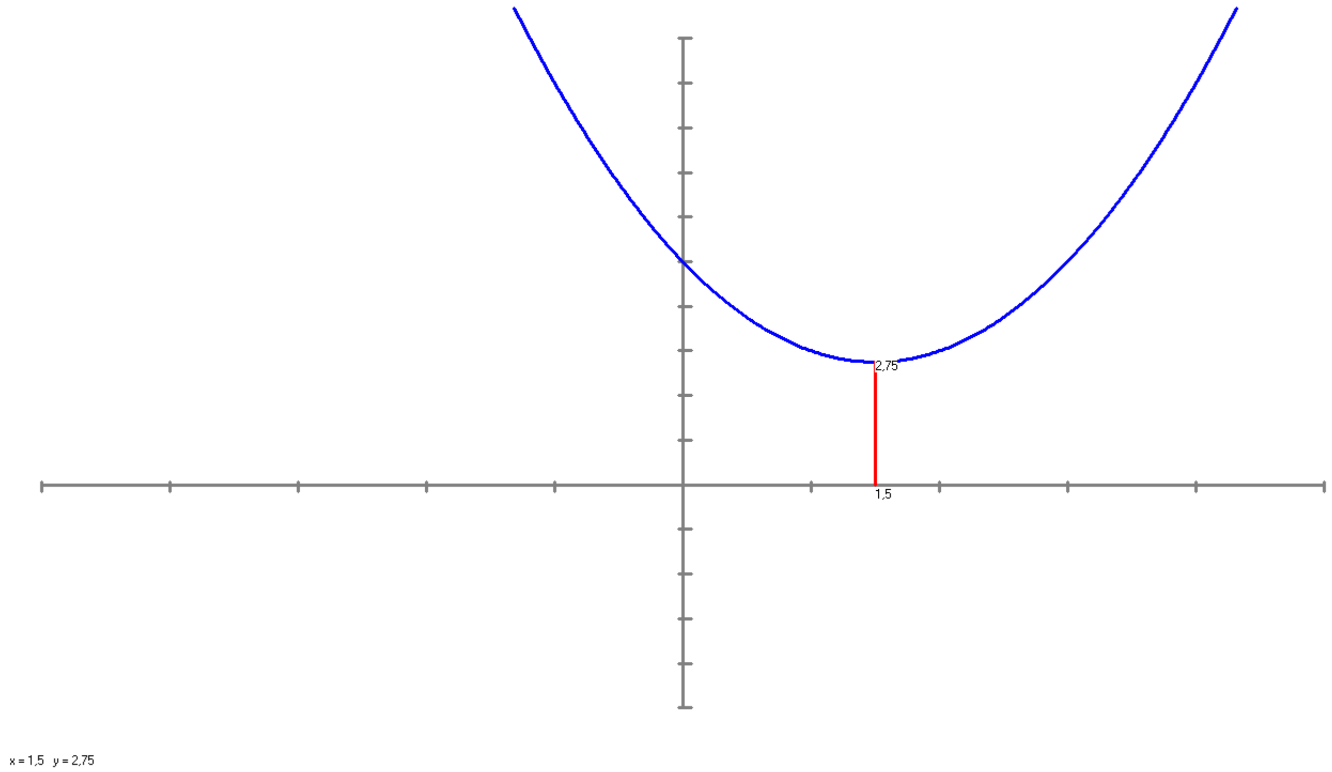
$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

En $x = 1{,}5$ tenemos un máximo o mínimo relativo, ahora hacemos la segunda derivada para comprobarlo.

$f''(x) = 2 > 0$

Como 2 es mayor que 0 entonces tenemos un mínimo relativo.



4.52 La función $f(x)=x^3-3x+6$ tiene un máximo relativo en:

a) $x=1$.
b) $x=-1$.
c) $x=0$.

$f'(x)=3x^2-3$

$3x^2-3=0$

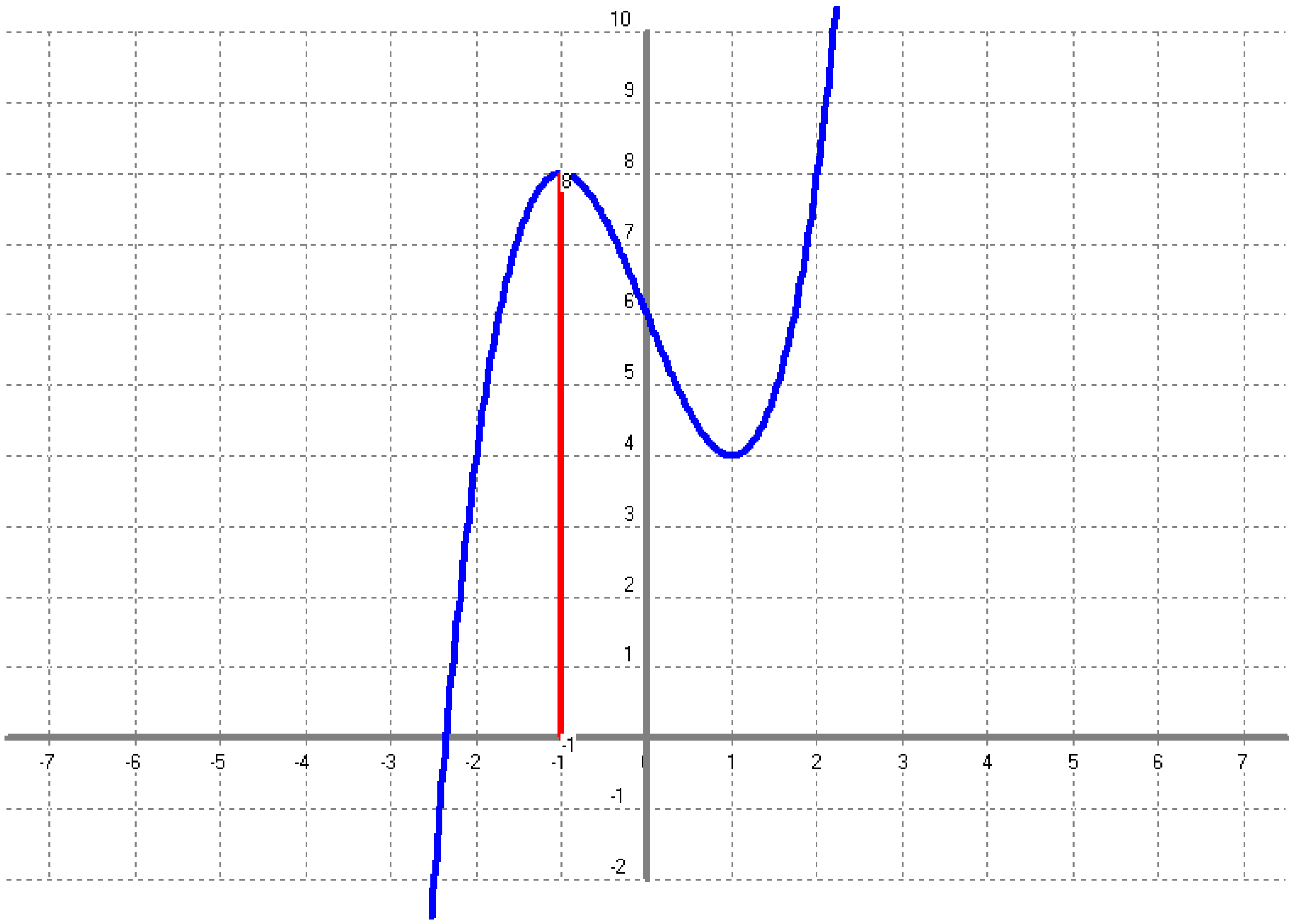
$x^2=1 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

En $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ tenemos un máximo o mínimo relativo, ahora hacemos la segunda derivada para comprobarlo.

$f''(x)=6x$

$f''(1)=6\cdot(1)=6>0$ Mínimo relativo

$f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0$ Máximo relativo



Máximos

4.53 La función $f(x) = x^3 - x^2$ en el intervalo $[1,2]$:

a) ***Es convexa***.
b) Es cóncava.
c) No es cóncava ni convexa.

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 > 0$ La pendiente de la recta tangente es 1

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8 > 0$ La pendiente de la recta tangente es 8

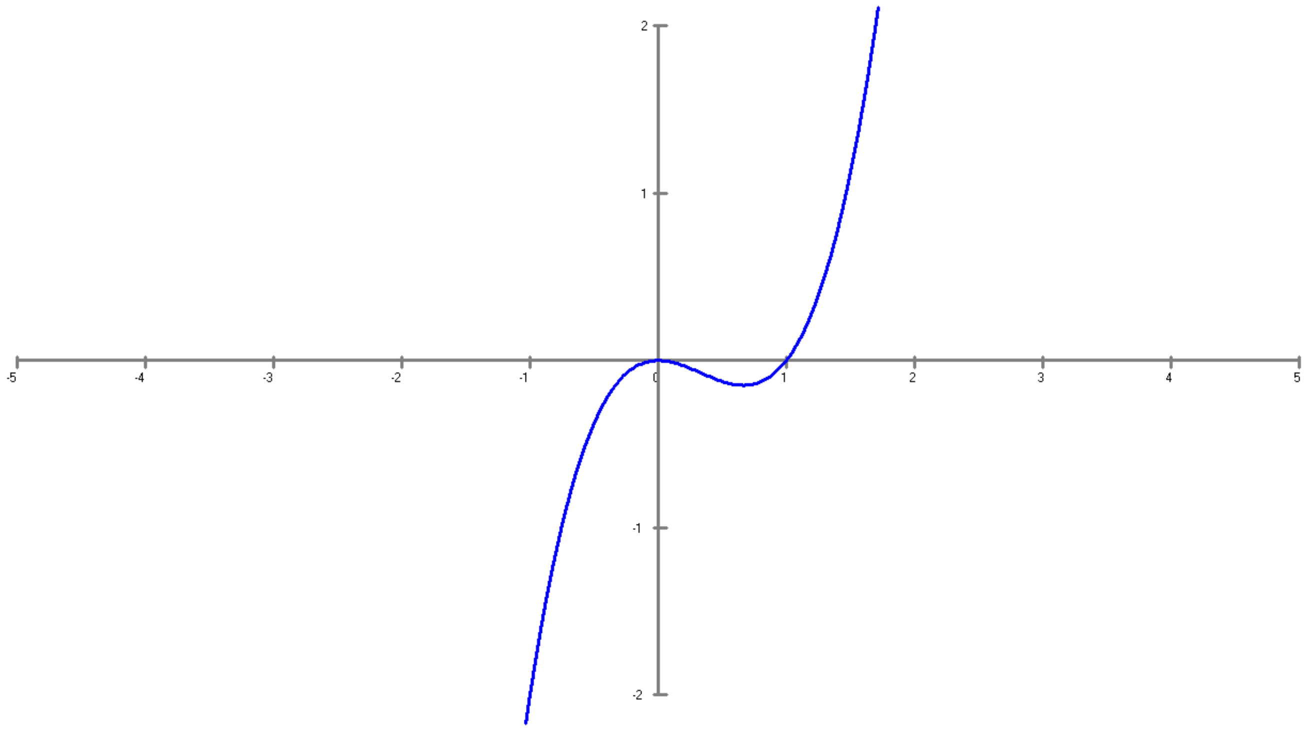
Como la pendiente de la recta tangente crece en el intervalo $[1,2]$ la función es convexa.

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0$

Como la segunda derivada es positiva en el intervalo $[1,2]$ y deducimos que la primera derivada es creciente en el intervalo $[1,2]$.



4.54 La función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $(0,\infty)$:

a) Es convexa.
b) Es cóncava.
c) No es cóncava ni convexa.

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Si la función que obtenemos de la segunda derivada la igualamos a 0 tenemos como soluciones:

$$\frac{2\cdot\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \qquad \begin{cases} x=-1/\sqrt{3} \\ x=1/\sqrt{3} \end{cases}$$

Quiere decir que en estos dos puntos hay un ***punto de inflexión***, es decir un cambio de curvatura, por lo tanto vamos a ver cómo se comporta la función antes y después de este punto, en concreto en $x=1/\sqrt{3}$ ya que el intervalo de definición es $(0,\infty)$.

Tomamos la primera derivada para hacer el estudio, $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

Primero miramos el intervalo $\left(0,1/\sqrt{3}\right)$

$$f'(0,2)=\frac{-2\cdot(0,2)}{\left(1+(0,2)^2\right)^2}=-0,3698$$

$$f'(0,4)=\frac{-2\cdot(0,4)}{\left(1+(0,4)^2\right)^2}=-0,5945$$

*Como la pendiente decrece la función es **cóncava**.*

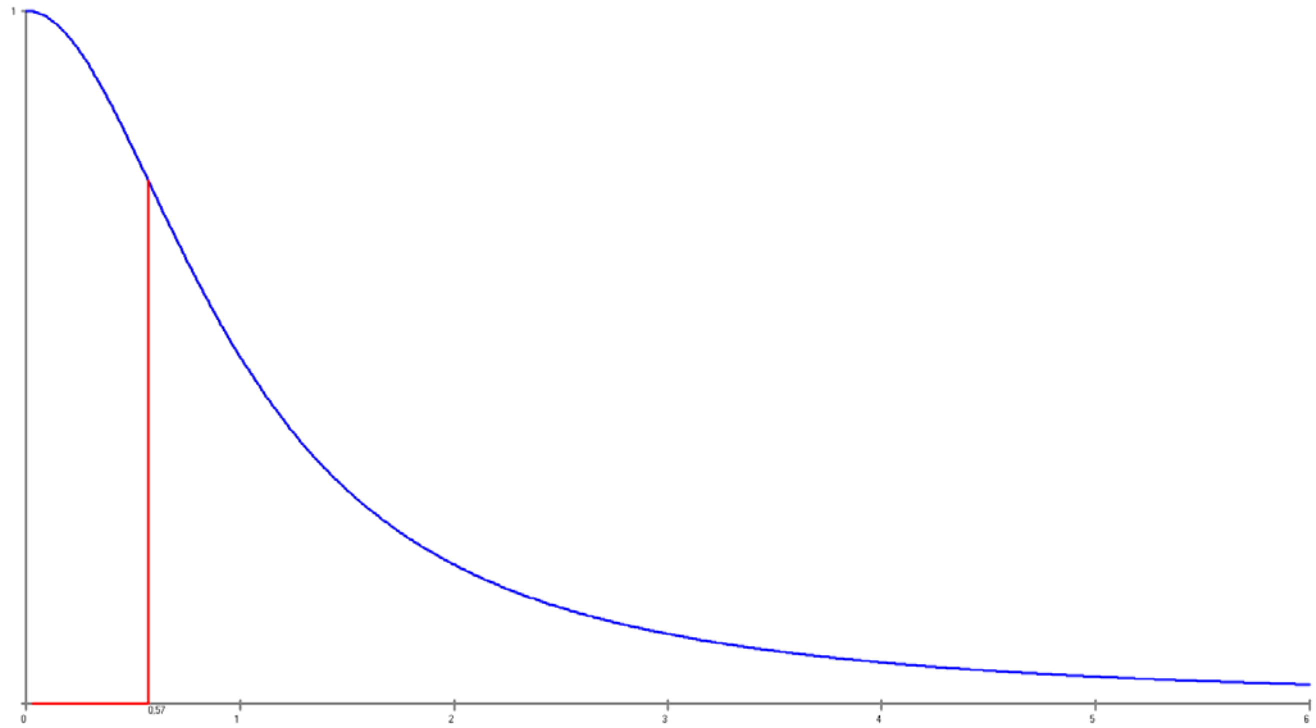
Segundo paso miramos el intervalo $\left(1/\sqrt{3},+\infty\right)$

$$f'(0,6)=\frac{-2\cdot(0,6)}{\left(1+(0,6)^2\right)^2}=-0,6487$$

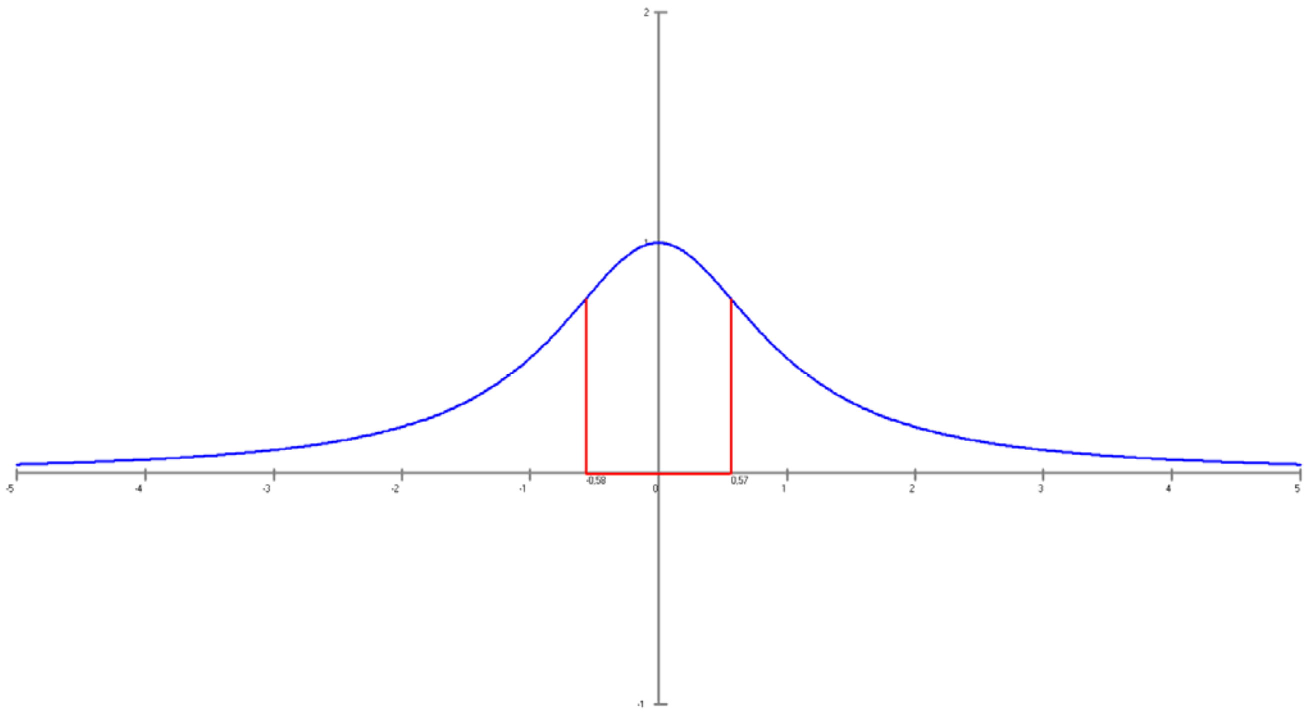
$$f'(1)=\frac{-2\cdot(1)}{\left(1+(1)^2\right)^2}=-0,5$$

$$f'(2)=\frac{-2\cdot(2)}{\left(1+(2)^2\right)^2}=-0,16$$

*Como la pendiente crece la función es **cónvexa**.*



x = 0,83   y = 0,592101



x = 1,683333   y = 0,260851

4.55 La función $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo $(0,\infty)$:

a) Creciente.
b) ***Es convexa***.
c) Es cóncava

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\leq 0$.

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$f'(1)=\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{1}=-1<0$ La pendiente de la recta tangente es -1

$f'(3)=\frac{-1}{3^2}=\frac{-1}{9}=-0,\widehat{1}<0$ La pendiente de la recta tangente es $-0,\widehat{1}$

$f'(5)=\frac{-1}{5^2}=\frac{-1}{25}=-0,04<0$ La pendiente de la recta tangente es $-0,04$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f''(1)=\frac{2}{1^3}=2>0$

$f''(5)=\frac{2}{5^3}=0,016>0$

Como la segunda derivada es positiva en el intervalo $(0,\infty)$ y deducimos que la primera derivada es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ crece y la función es convexa