Centro Asociado Palma de Mallorca

Cuestiones de Autoevaluación Tema 4

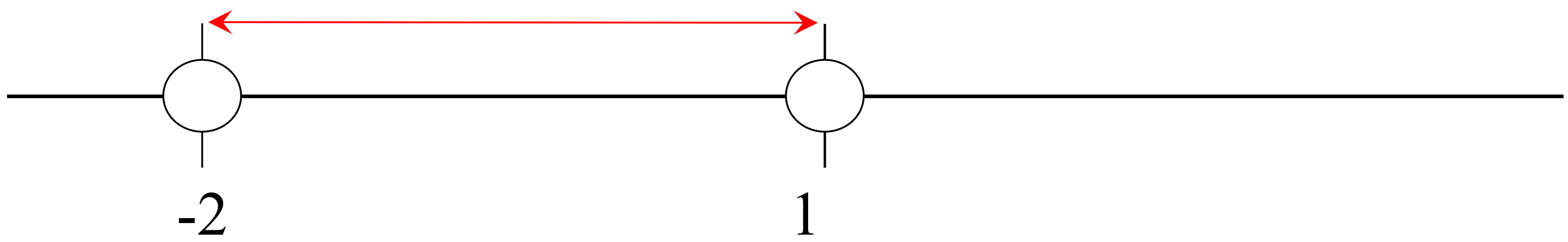
Tutor: Antonio Rivero Cuesta

4.1 El intervalo abierto $(-2,1)$ es el conjunto de los números reales x que verifican:

a) $-2 \leq x \leq 1$.

b) $-2 < x < 1$.

c) $x < -2$ o $x > 1$.

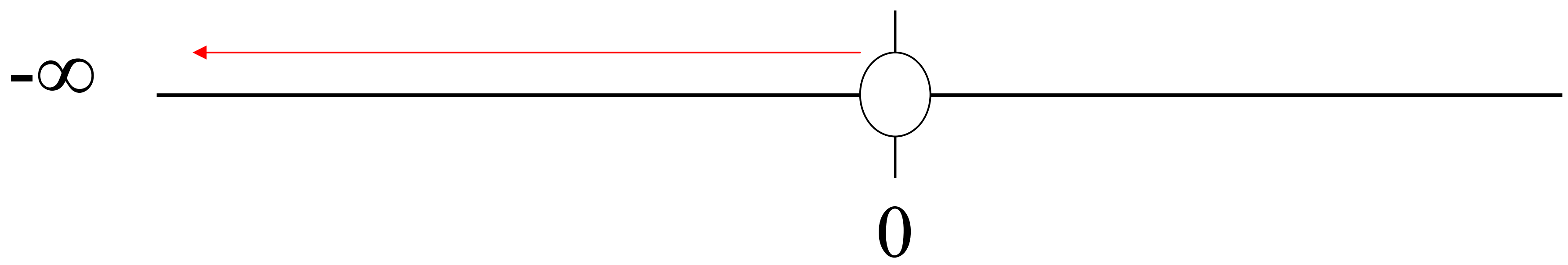


4.2 El intervalo abierto $(-\infty,0)$ es el conjunto de los números reales *x* que verifican:

a) $x \leq 0$.

b) $x > 0$.

c) $x < 0$.

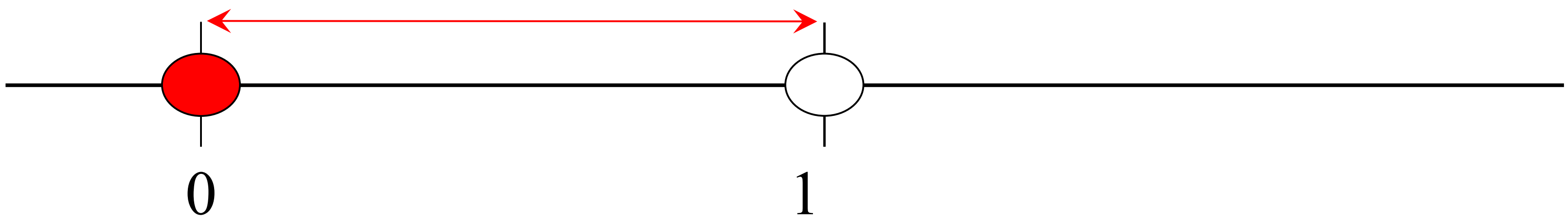


4.3 El conjunto de los números reales x que verifican $0 \leq x < 1$, es igual al intervalo:

a) $[0,1)$.

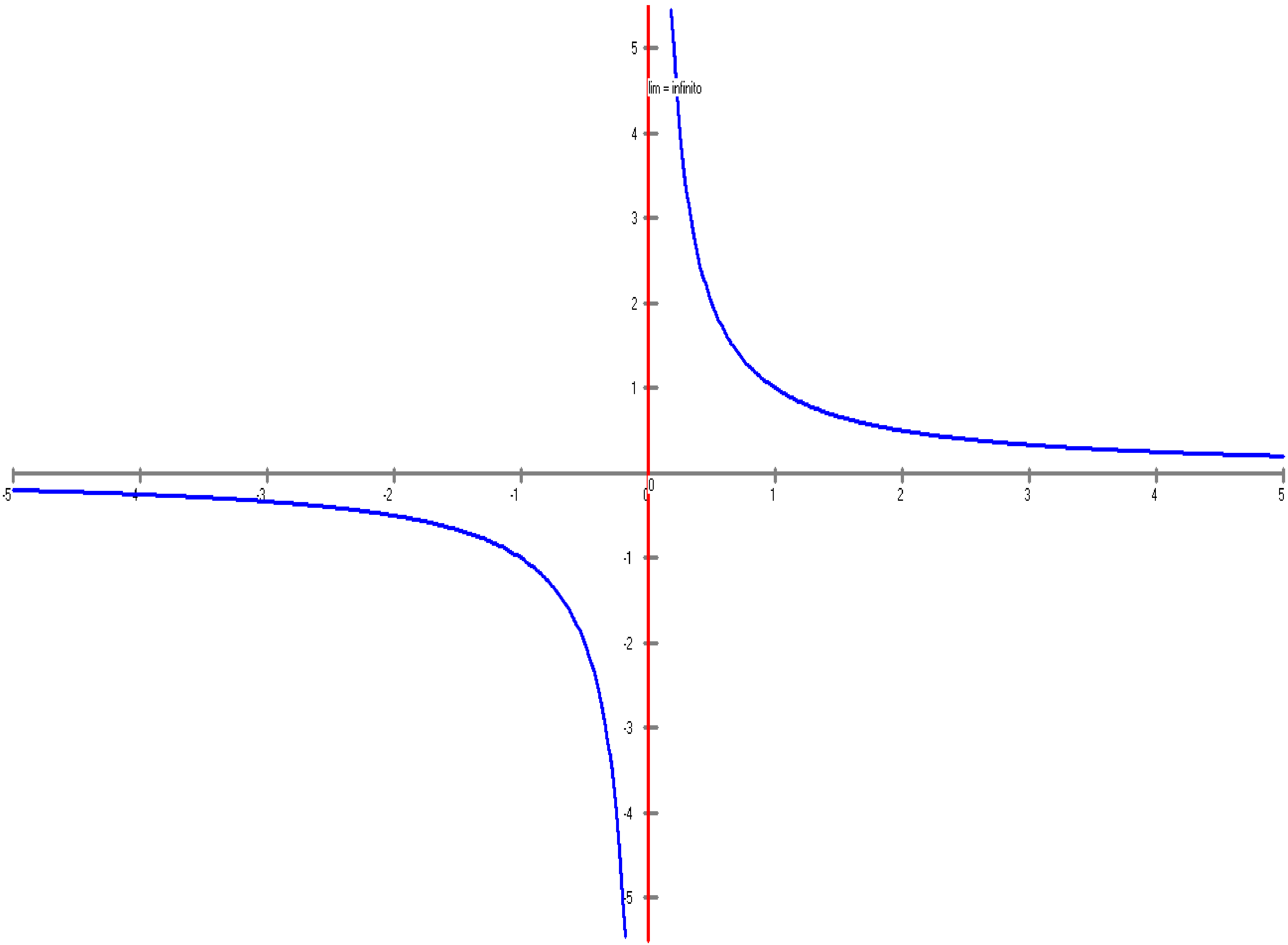
b) $(0,1)$.

c) $(0,1]$.



4.4 La expresión $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ define una función $f{:}I\to\mathbb{R}$ cuando:

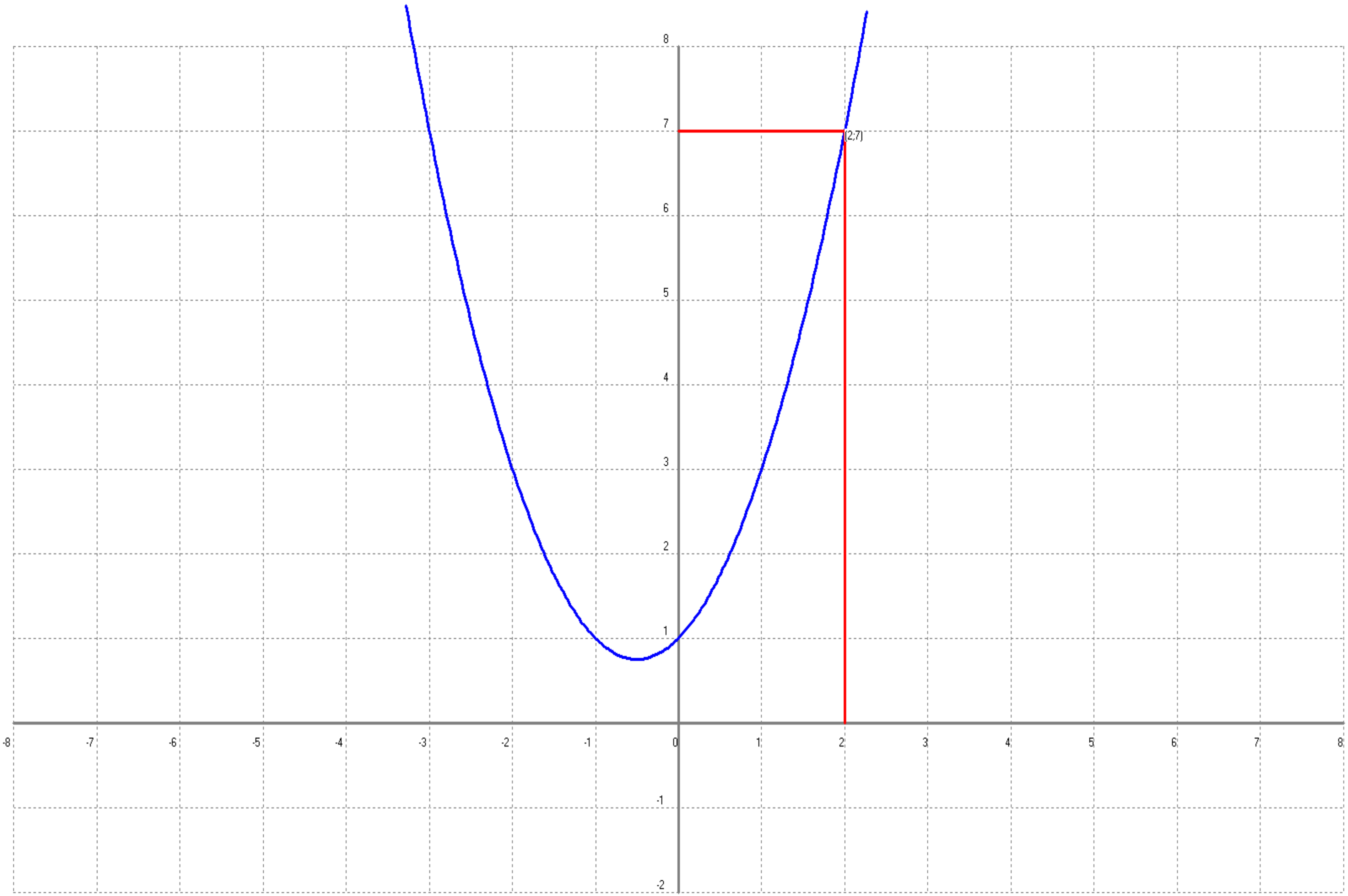
a) $\mathrm{I}=(-\infty,2]$.
b) $\mathrm{I}=[-1,1)$.
c) $\mathrm{I}=[1,\infty)$.



x = 0   lim = infinito

4.5 El gráfico de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ pasa por el punto.

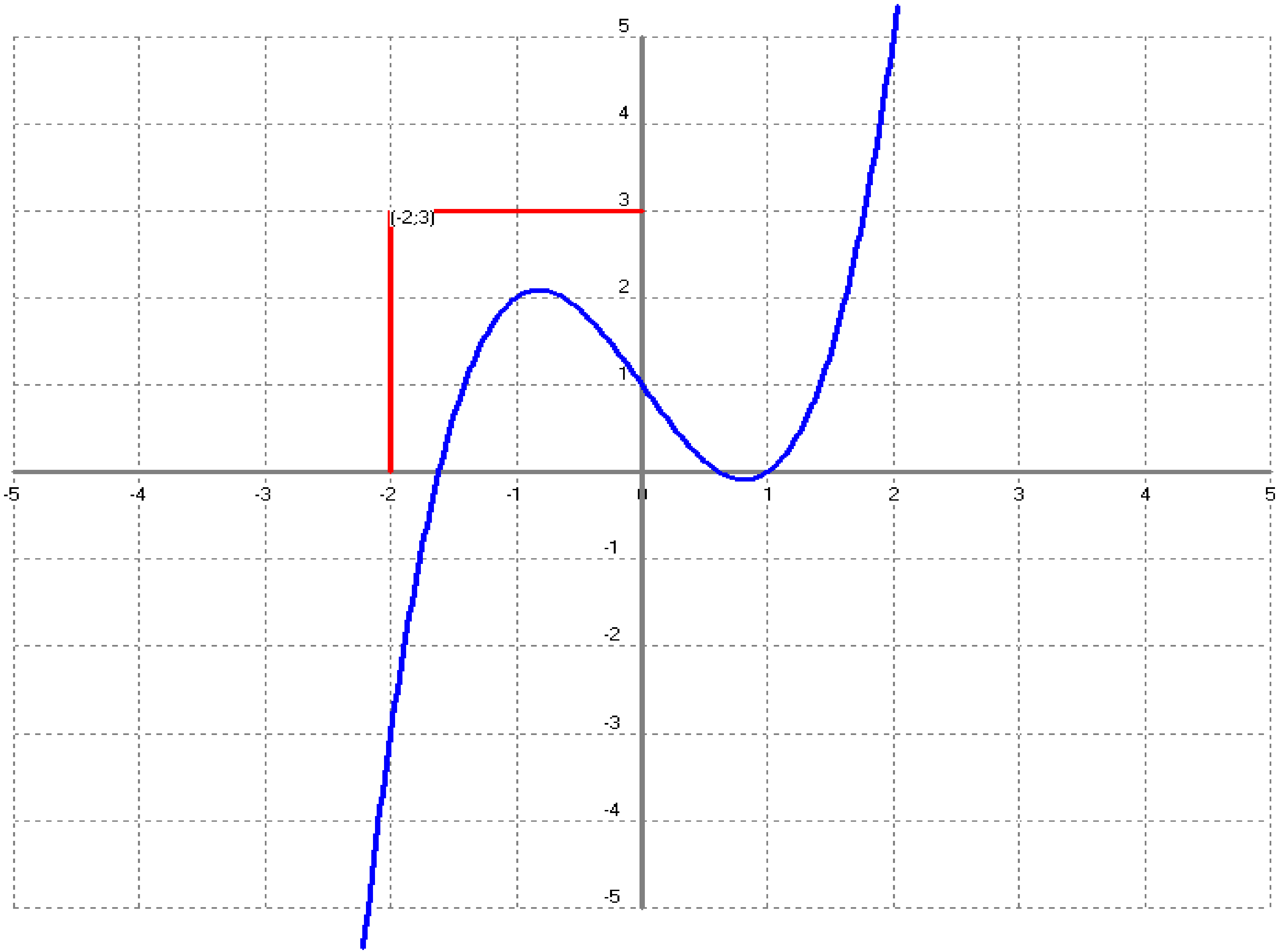
a) (2,5).
b) (2,3).
c) (2,7).



8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
(2;7)

4.6 El gráfico de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ NO pasa por el punto:

a) $(2,5)$.
b) $(-1,2)$.
c) $(-2,3)$.



5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
(-2;3)
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

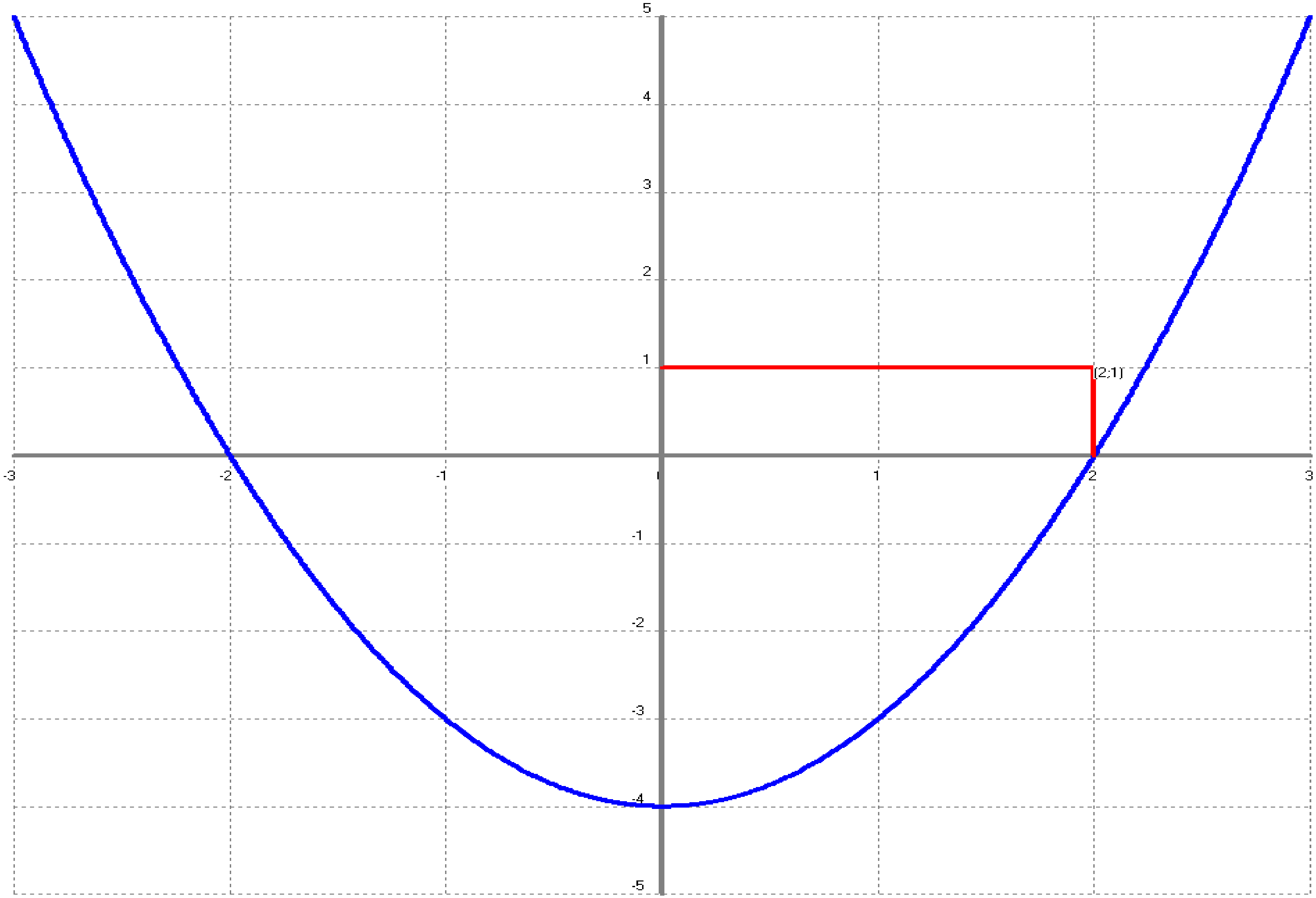
4.7 El gráfico de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, pasa por los puntos:

a) (2, 0.5) y (4,1).
b) (2, 0.5) y (4, 0.25).
c) (0.5, 3) y (0.25, 4).

(2;0,51)
(4;0,255)

4.8 Si f es la función $f(x) = x^2 - 4$ definida en $(-\infty,\infty)$, el punto (2,1) está:

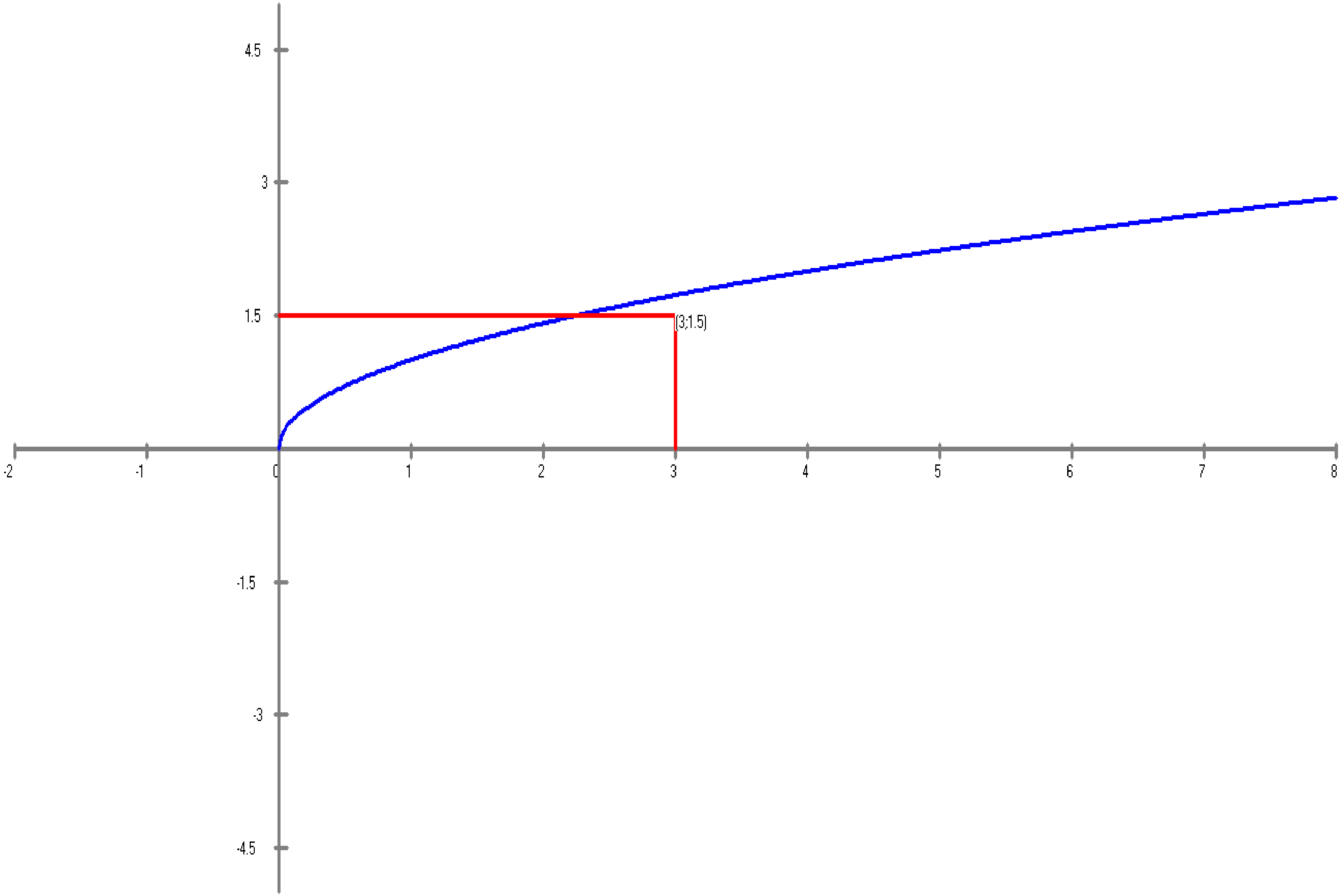
a) Por encima de la gráfica de f.
b) Por debajo de la gráfica de f.
c) Sobre la gráfica de f.



5
4
3
2
1
(2;1)
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4
-5

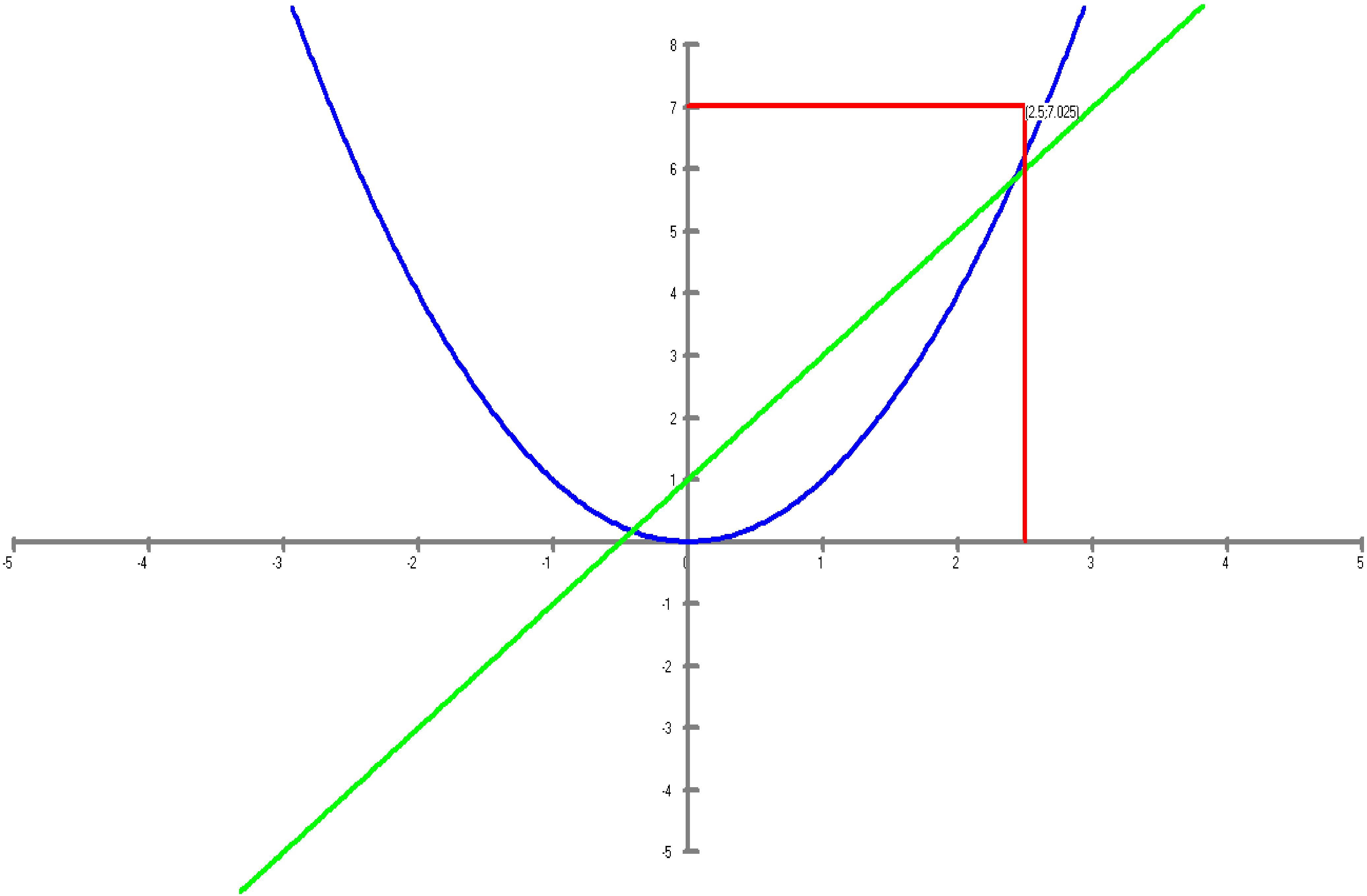
4.9 Si f es la función $f(x)=\sqrt{x}$ definida en $(0,\infty)$, el punto (3, 1.5) está:

a) Por encima de la gráfica de f.
b) Por debajo de la gráfica de f.
c) Sobre la gráfica de f.


4.5
3
1.5
-1.5
-3
-4.5
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
(3;1.5)

4.10 Si f es la función $f(x) = x^2$ definida en $(-\infty,\infty)$, y g es la función $g(x) = 2x + 1$ definida en $(-\infty,\infty)$, el punto (2.5, 7) está:

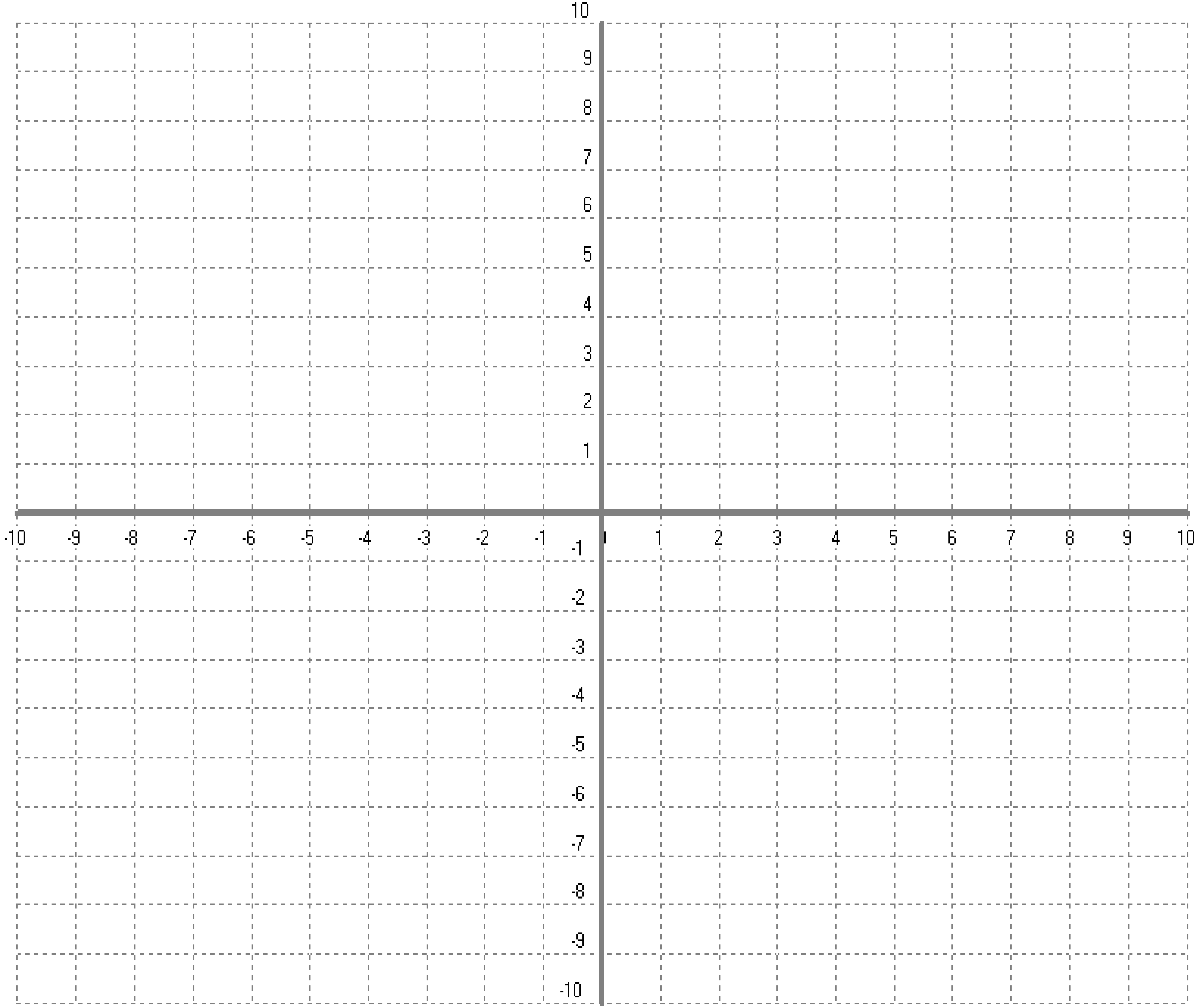
a) Por debajo de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.
b) Por debajo de la gráfica de f y por debajo de la gráfica de g.
c) Por encima de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.



(2.5;7.025)
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

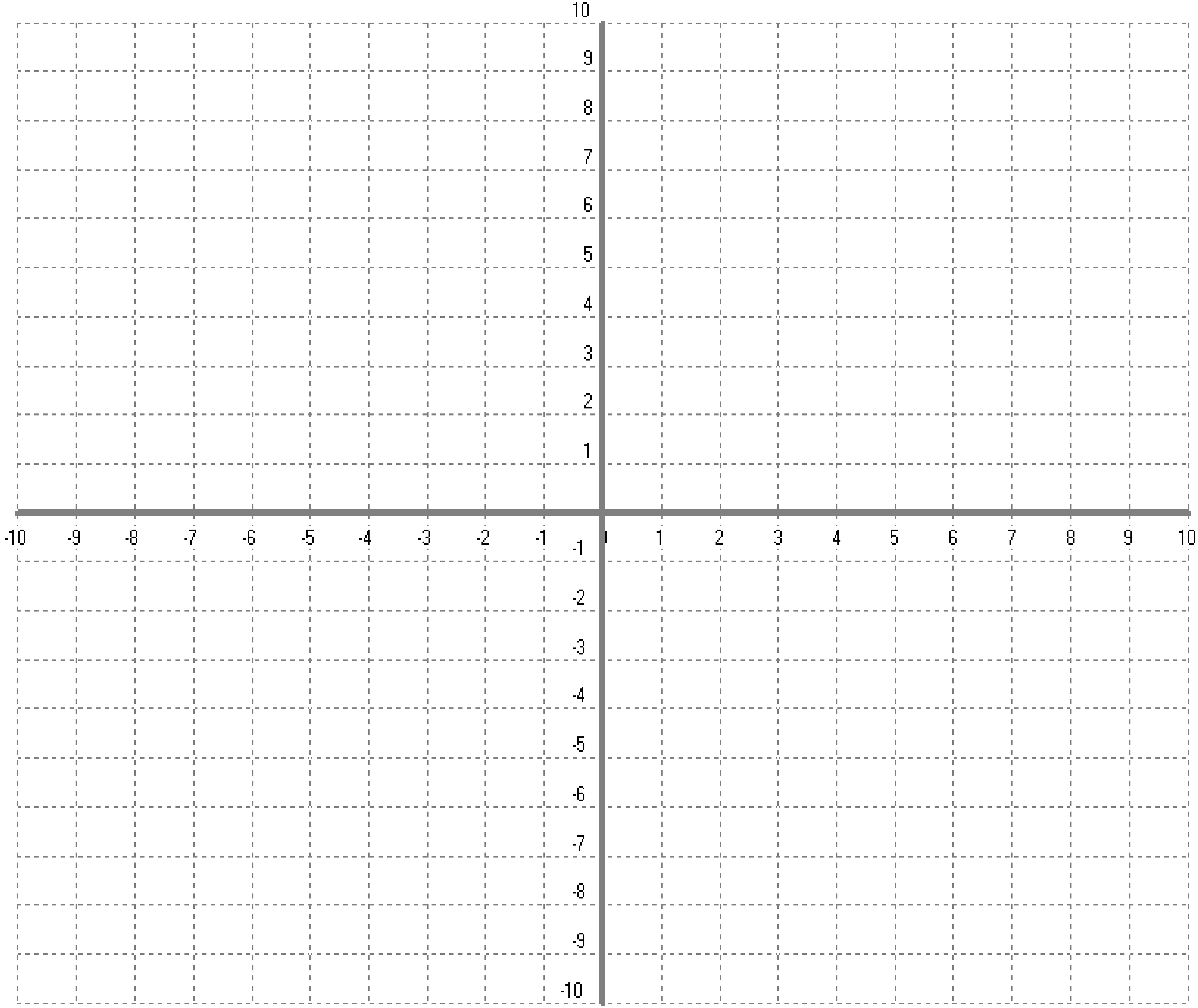
4.11 Si f es creciente en el intervalo $(-3,0)$ se cumple:

a) $f(-1) \leq f(-2)$.
b) $f(-1) \geq f(-1/2)$.
c) $f(-1/2) \geq f(-2)$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

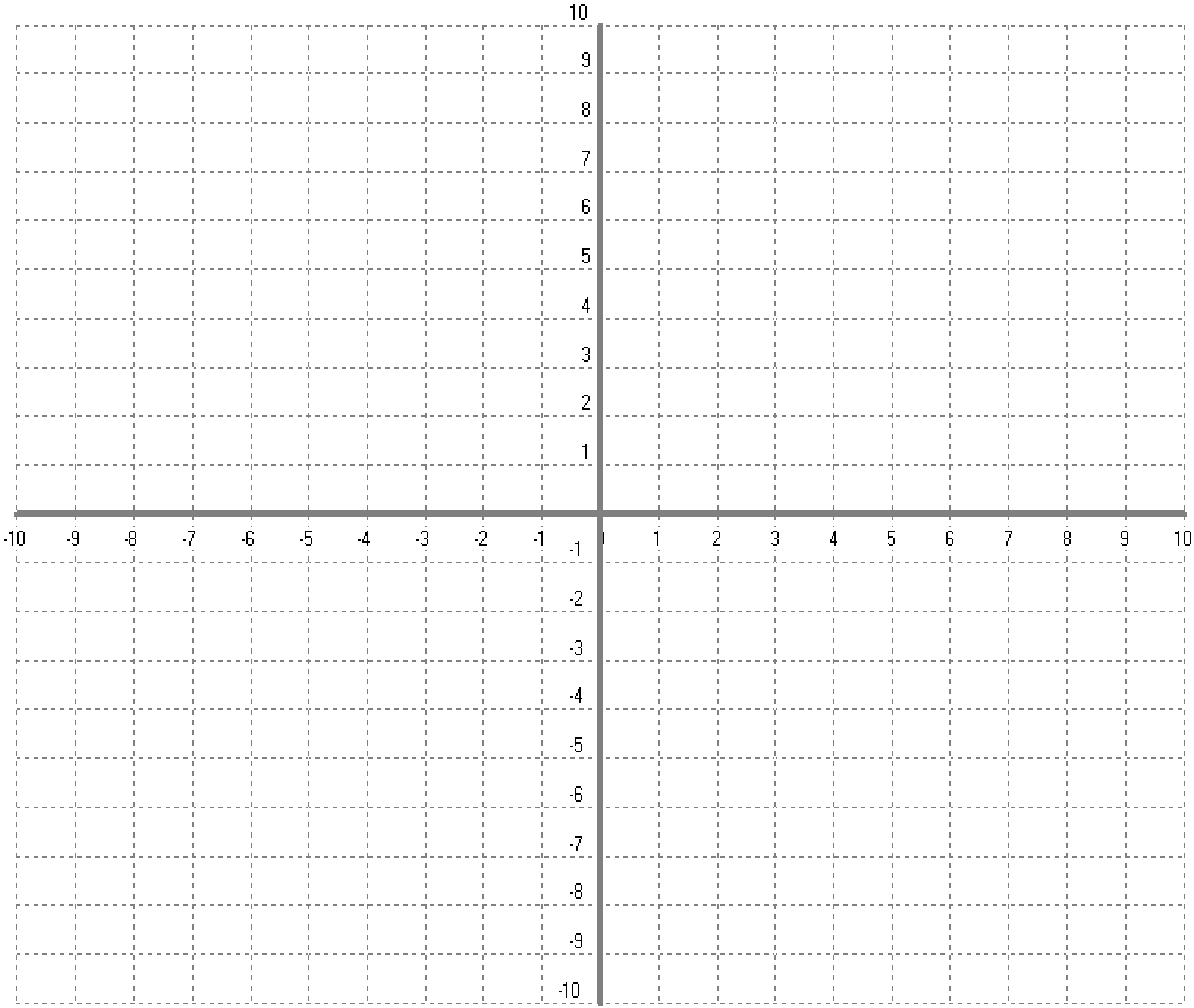
4.12 Si f es creciente en el intervalo $(-4,1)$ no puede ser:

a) $f(-3) > f(-1)$.
b) $f(1/2) > f(-1/2)$.
c) $f(-3) = f(-2)$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

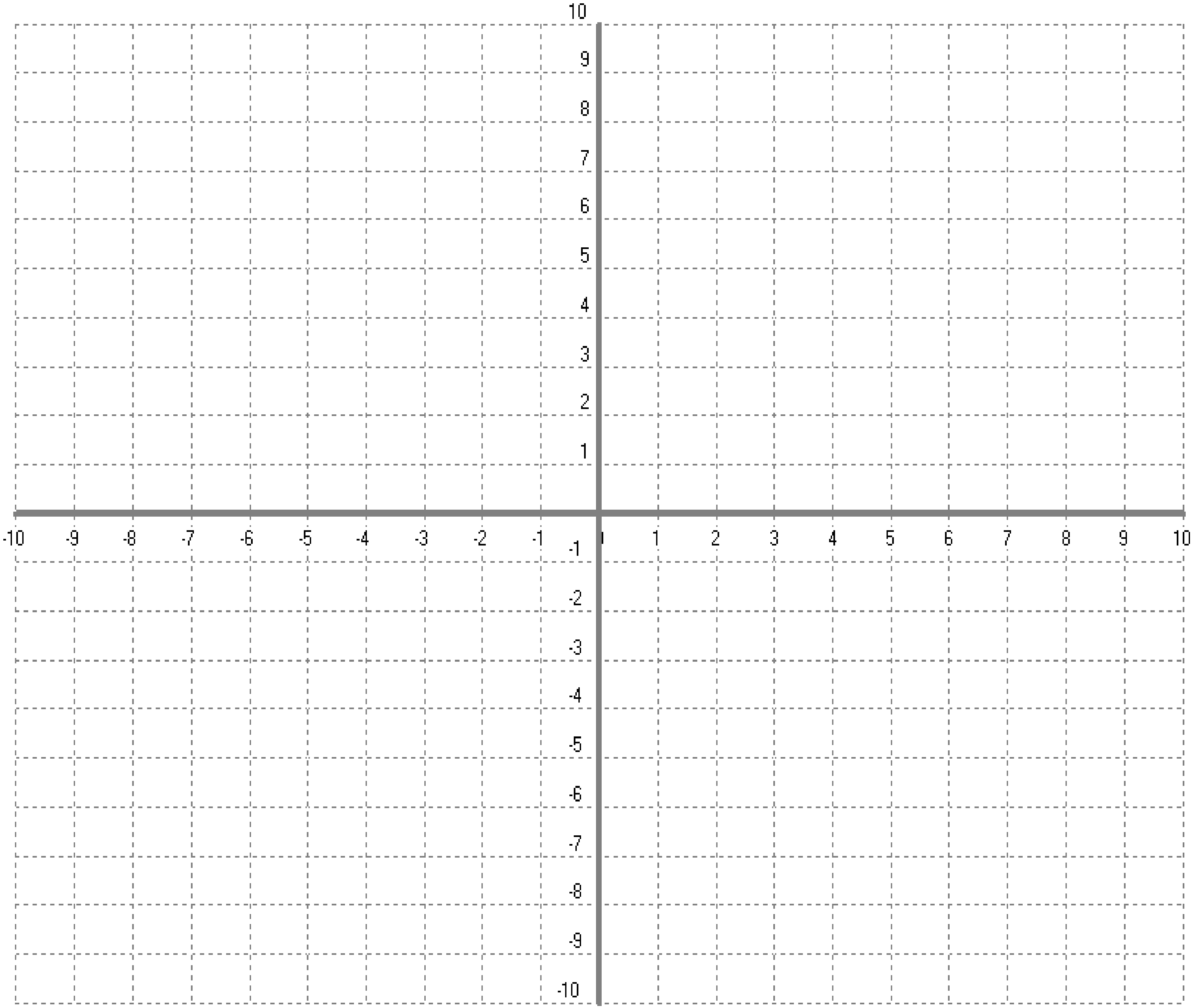
4.13 Si f es decreciente en el intervalo $(-2,2)$ tiene que ser:

a) $f(-1) \leq f(0)$.
b) $f(-3/2) \geq f(-1/2)$.
c) $f(-1/2) \leq f(1/2)$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

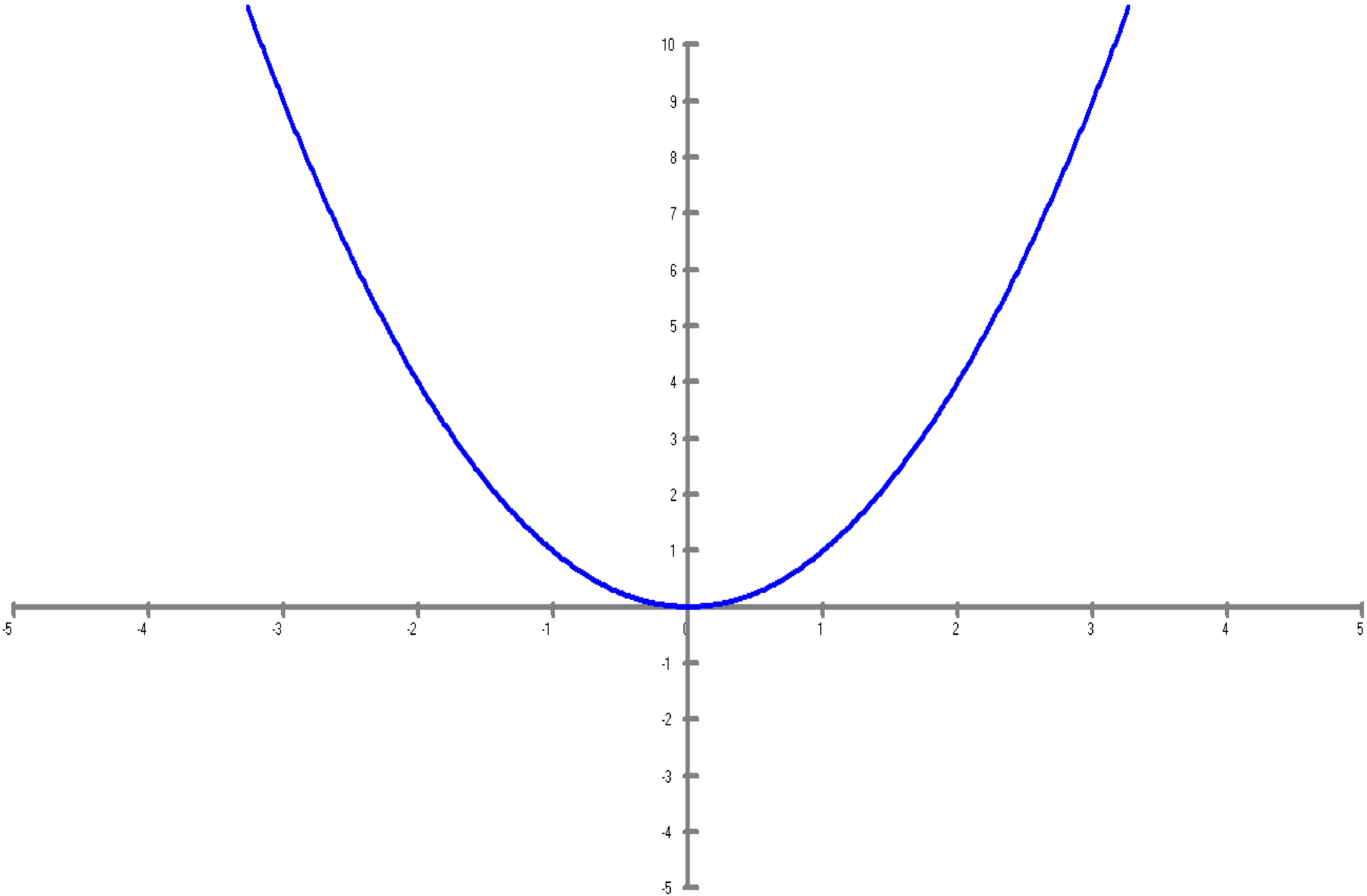
4.14 Si f es decreciente en el intervalo $(-3,1)$ no puede ser:

a) $f(-4/3) < f(-2/3)$.
b) $f(-4/3) < f(-5/3)$.
c) $f(-7/3) = f(-4/3)$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

4.15 La función $f(x) = x^2$ es:

a) Creciente en el intervalo $(-2,-1)$.
b) Creciente en el intervalo $(2,3)$.
c) Decreciente en el intervalo $(1,2)$.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

4.16 El límite de $\lim_{x \to -1} f(x) = x^2 + x - 1$ es:

a) 0.

b) -1.

c) 3.

4.17 El límite de $\lim_{x\to 2} f(x)=\sqrt{x-1}$ es:

a) 1.

b) -1.

c) No existe.

4.18 Si f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, se verifica:

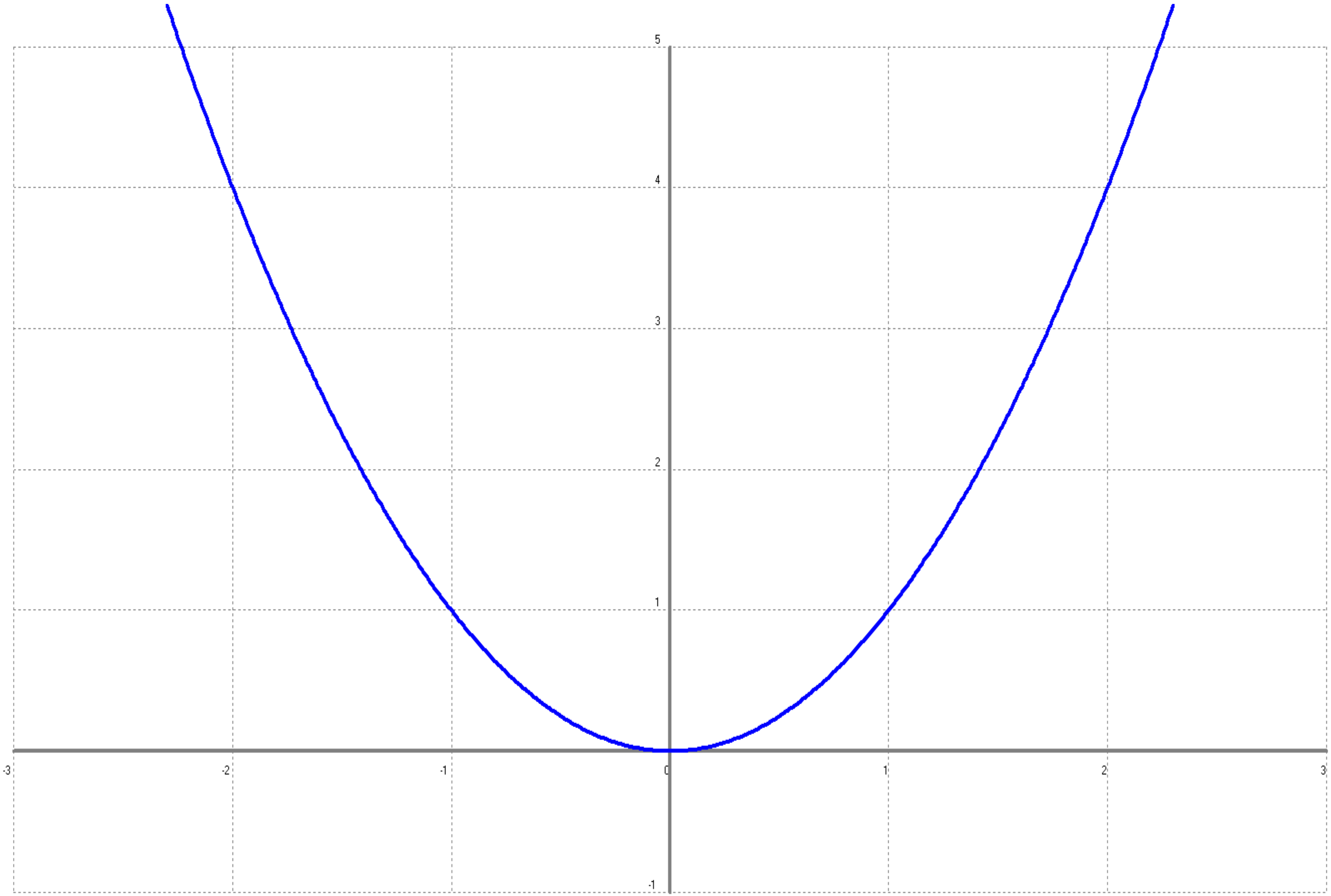
a) $\lim_{x\to 0} f(x) > f(0)$.

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

c) $\lim_{x\to 0} f(x) \geq f(0)$.

Como $f(x) \geq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, tiene que ser $\lim_{x \to 0} f(x) \geq \lim_{x \to 0} f(0) = f(0)$

La función $f(x) = x^2$, tiene un mínimo relativo en x = 0 y existe $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.



5
4
3
2
1
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3

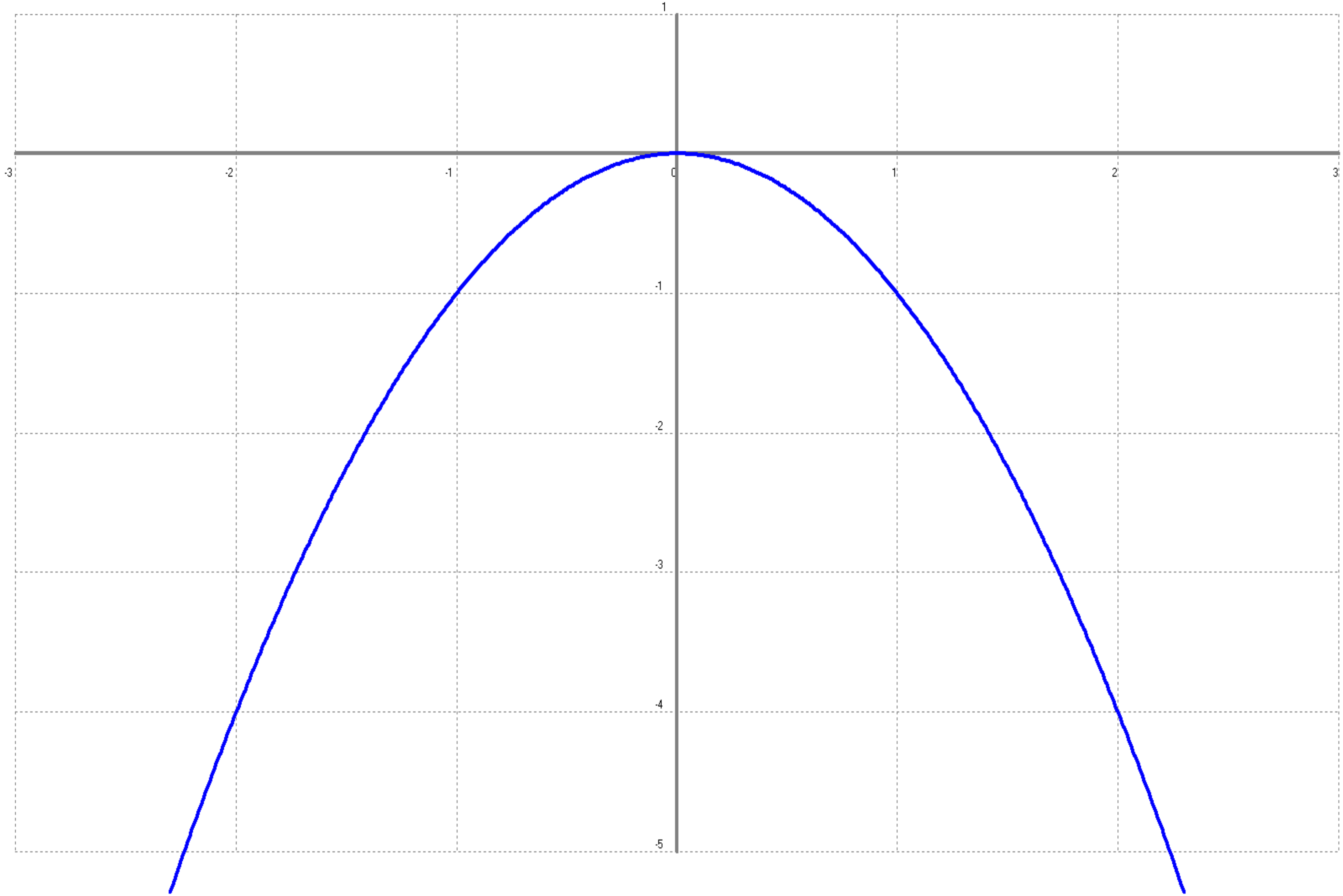
4.19 Si f tiene un máximo relativo en $x = 0$ y existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, se verifica:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \leq f(0)$.

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

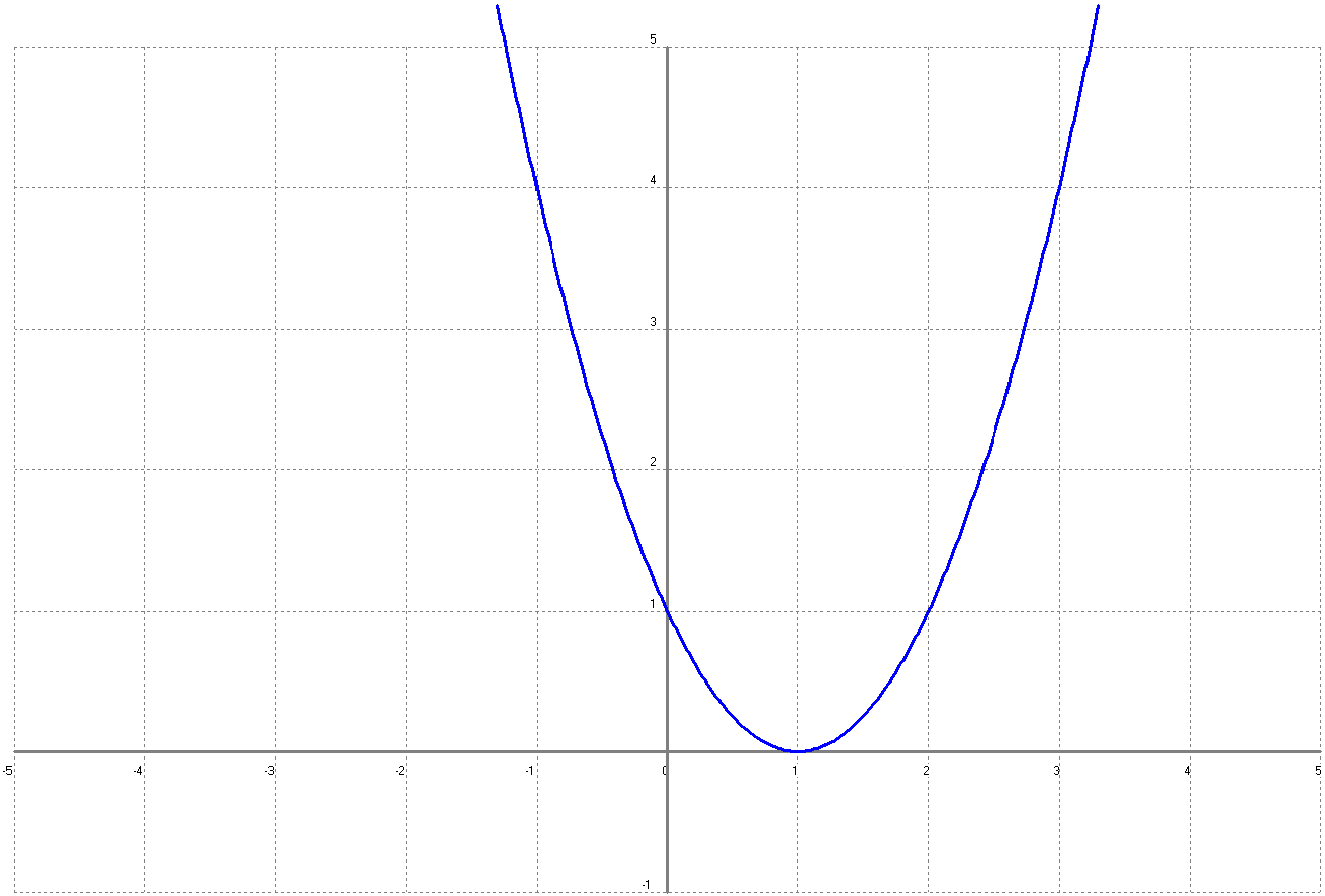
c) $\lim_{x\to 0} f(x) < f(0)$.

Como $f(x) \leq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, tiene que ser $\lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} f(0) = f(0)$


1
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4
-5

4.20 La función $f(x) = (x - 1)^2$:

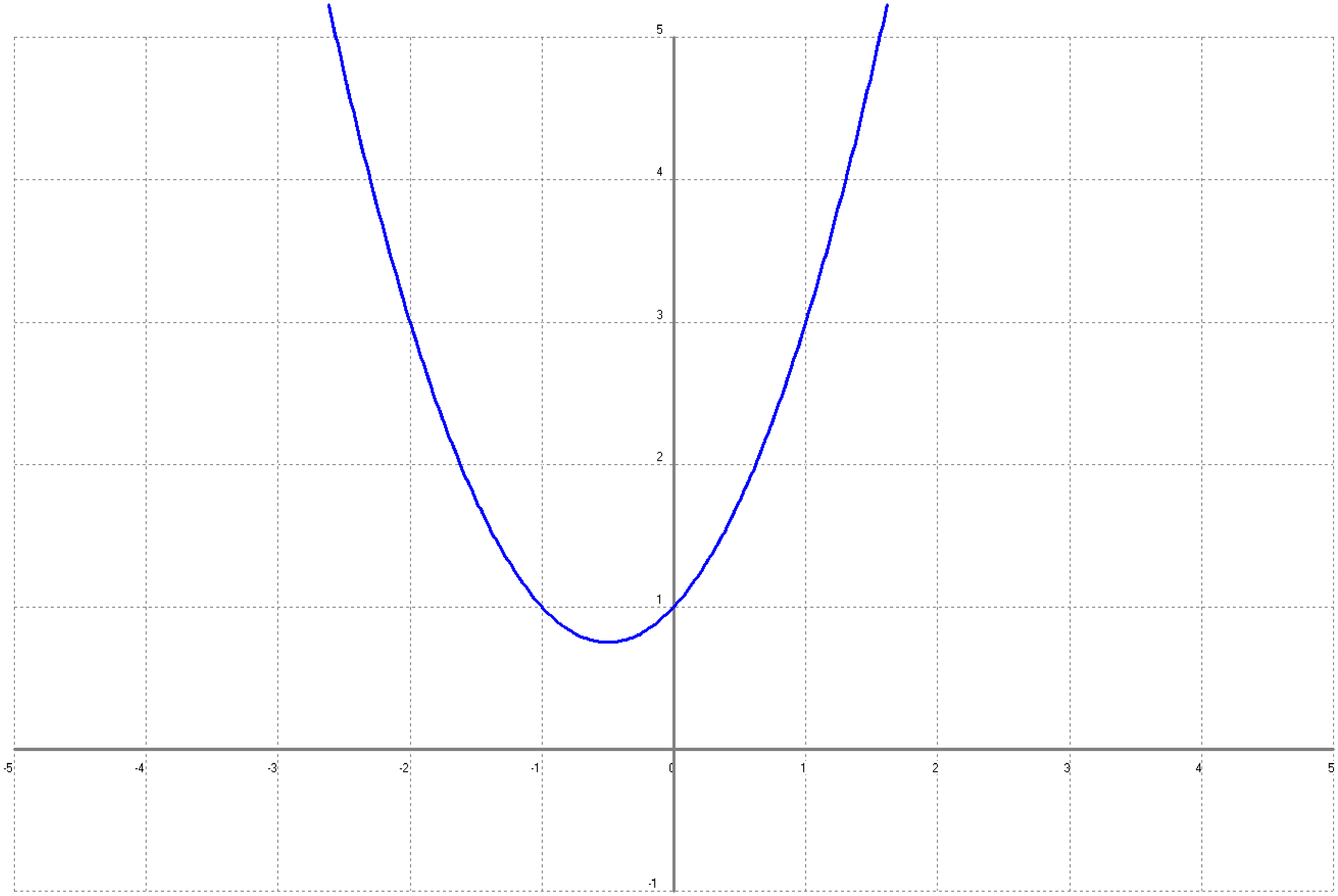
a) Es continua en x = 1 y x = 2.
b) Es discontinua en x = 1 y continua en x = 2.
c) Es discontinua en x = 1 y x = 2.



5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

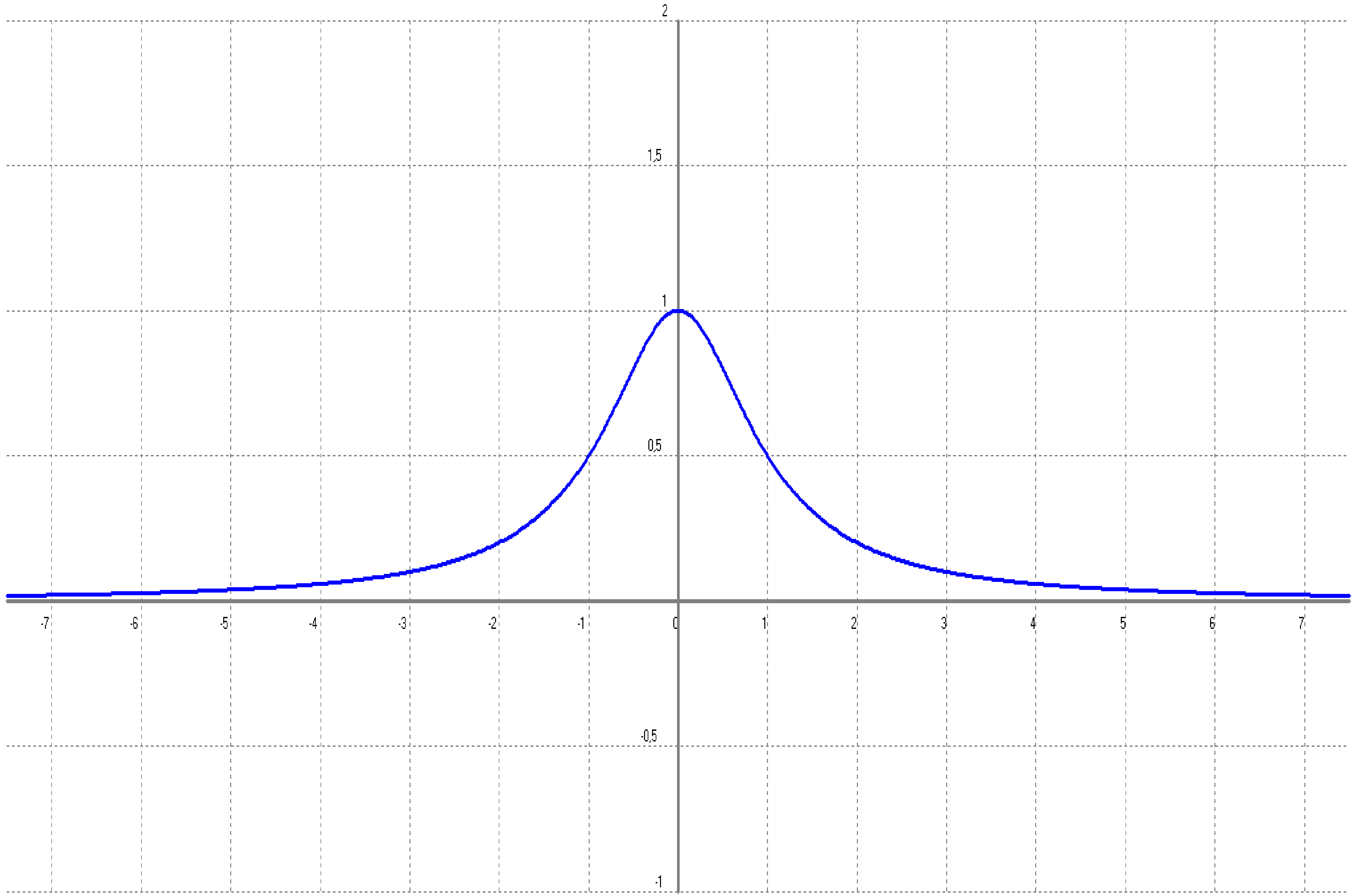
4.21 La función $f(x) = x^2 + x + 1$:

a) Es continua en todos sus puntos.
b) Es discontinua en x = 0.
c) Es discontinua en x = 1.


5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

4.22 La función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) Es continua en todos los puntos.
b) Es discontinua en $x = 0$.
c) Es discontinua en $x = -1$.


2
1,5
1
0,5
-0,5
-1
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.23 La función definida como $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}$ para $x \neq 1$ y $f(1) = \boldsymbol{c}$.

a) Tiene una discontinuidad en x = 1, independientemente del valor de c.

b) Es continua en x = 1 si c = 2.

c) Es continua en x = 1 si c = 0.

Una función f es continua en el punto x_0 si se verifica

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

El valor de la función en un punto es igual al valor del límite en ese punto.

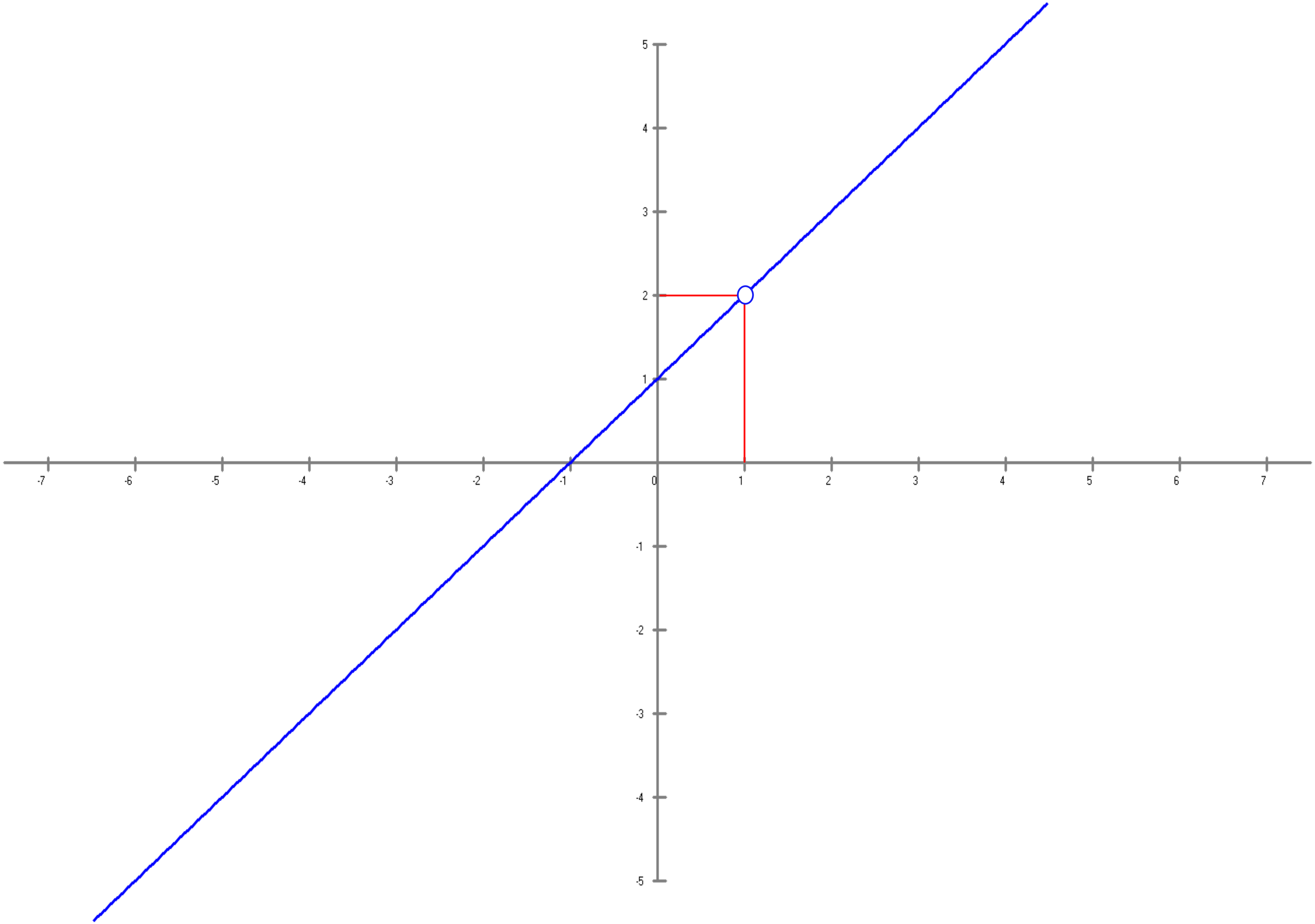
$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{0}{0}$$

L´hopital

$$f(x) = \frac{-2x}{-1} = 2x$$

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}=2=f(1)=c$$


5
4
3
2
1
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
-4
-5

4.24 La función $f(x) = |x|$, que se define como $f(x) = -x$ si $x < 0$ y $f(x) = x$ si $x \geq 0$.

a) Es continua en todos los puntos.

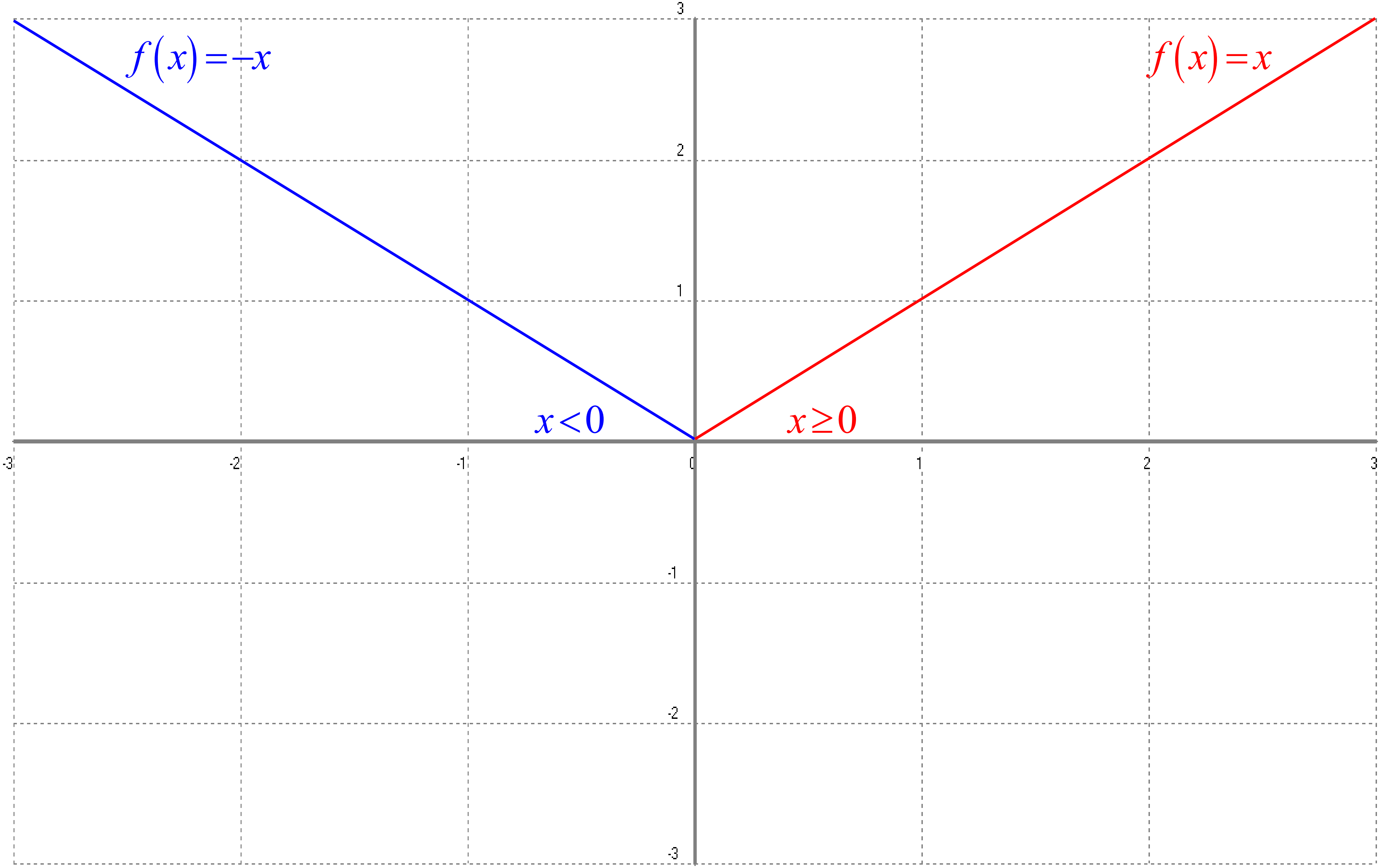
b) Tiene una única discontinuidad.

c) Tiene dos discontinuidades.

Hay que estudiar los límites laterales en el punto 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \end{array}\right\}$$

Como se puede ver coinciden los límites laterales por lo tanto es continua en todos sus puntos.



$f(x) = -x$
$f(x) = x$
$x < 0$
$x \geq 0$
-3
-2
-1
0
1
2
3

4.25 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Toda función continua en un punto x0 es derivable en ese punto.

b) Toda función derivable en un punto x0 es continua en ese punto.

c) Algunas funciones derivables en un punto x0 no son continuas en ese punto.

4.26 La función $f(x) = x^2$ tiene derivada

a) $f'(\mathrm{x}) = 2x^2$.

b) $f'(\mathrm{x}) = 2x$.

c) $f'(\mathrm{x}) = 2$.

4.27 La función $f(x) = x^3 + x$ tiene derivada

a) $f'(\mathrm{x}) = 3x^3 + x.$

b) $f'(\mathrm{x}) = 3x^2 + x.$

c) $f'(\mathrm{x}) = 3x^2 + 1.$

4.28 La función $f(x)=\sqrt{x}$ tiene derivada

a) $f'(x)=2\sqrt{x}$.

b) $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.29 La función $f(x) = (2 - 3x)^3$ tiene derivada

a) $f'(x) = 3 \cdot (2 - 3x)^2$.

b) $f'(x) = -9 \cdot (2 - 3x)^2$.

c) $f'(x) = -6 \cdot (2 - 3x)^2$.

4.30 Para $x \neq 0$ la función $f(x) = 3/x$ tiene derivada

a) $f'(x) = -3/x^2$.

b) $f'(x) = 3/x^2$.

c) $f'(x) = 2/x^2$.

4.31 La función $f(x) = (x + 1)\cdot(x^2 + 1)$ tiene derivada

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

b) $f'(x) = x^2 + 2x + 1$.

c) $f'(x) = 2x^2 + 2x + 1$.

4.32 La derivada de la función $f(x) = x^3 - x^2$ en el punto $x = 3$, es igual a:

a) 27.

b) 1.

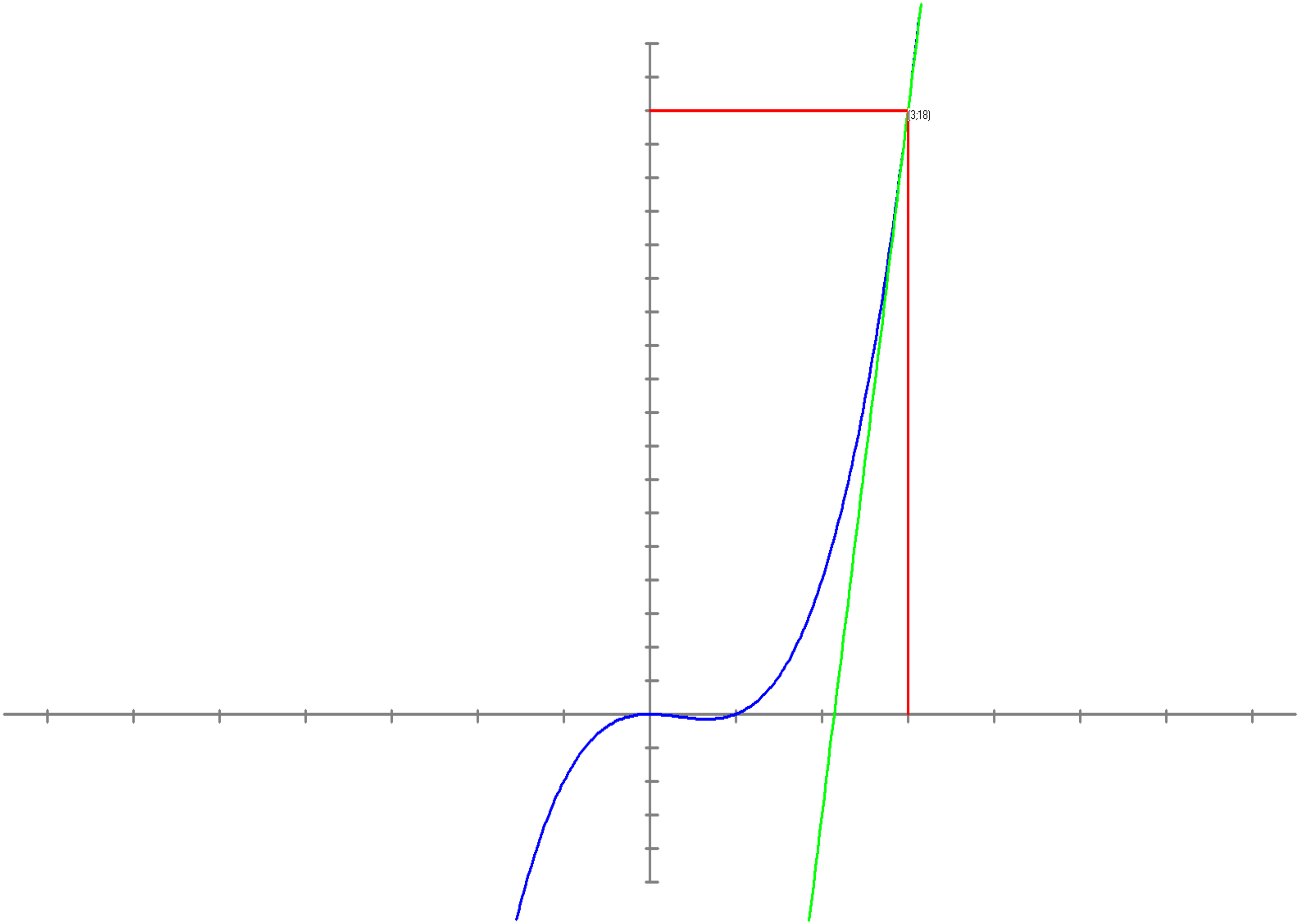
c) 21.

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

Miramos la función derivada en $x = 3$

$$f'(3) = 3(3)^2 - 2 \cdot 3 = 21$$


(3;18)

4.33 La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto $x = 1$, es igual a:

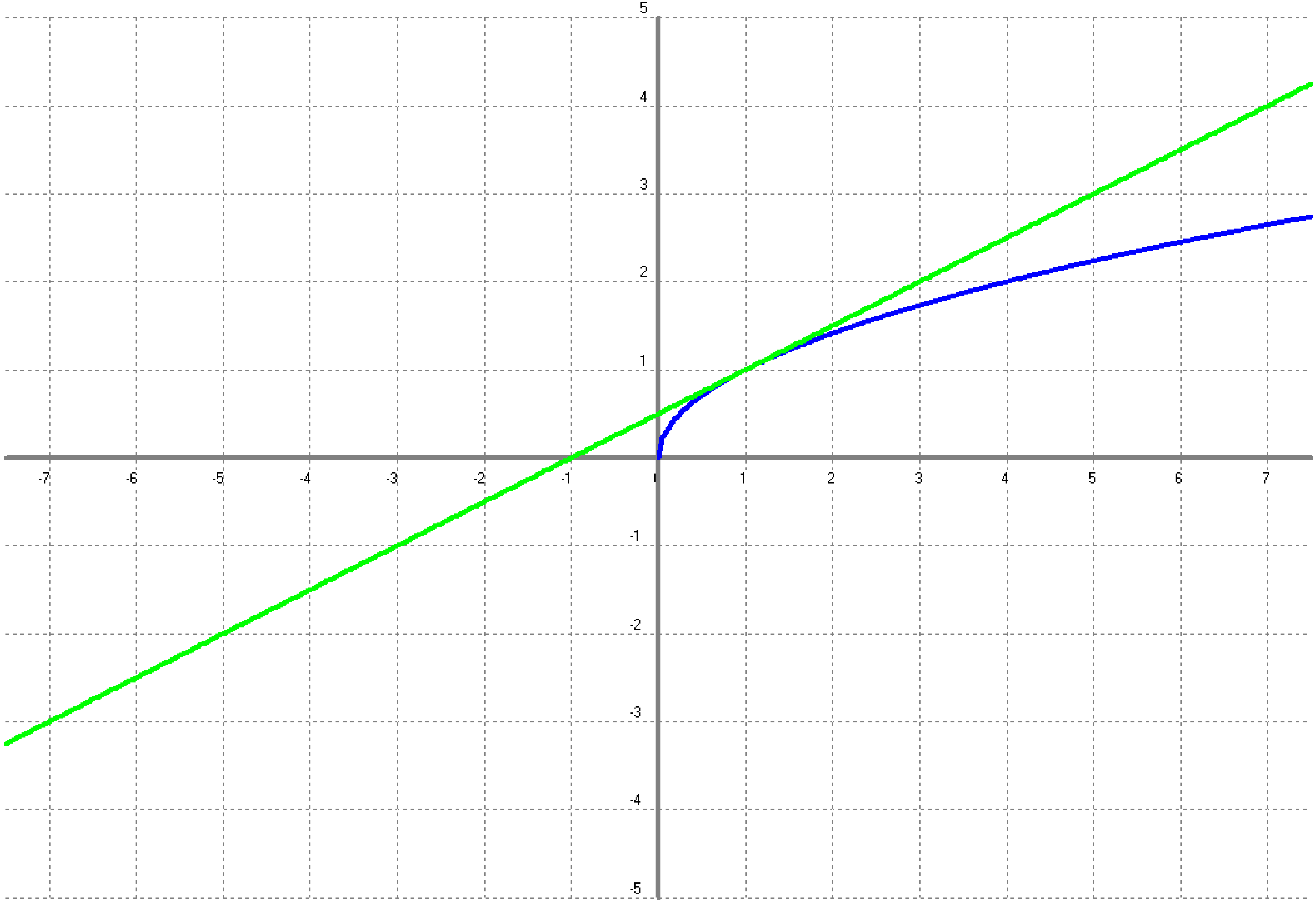
a) 0.
b) -1.
c) 1/2.

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Miramos la función derivada en x = 1

$$f'(1) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$



5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.34 La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}-x$ cumple:

a) $f'(1)=-5/6$.

b) $f'(4)=-3/4$.

c) $f'(9)=-1/2$.

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 1$$

Miramos la función derivada en x = 4

$$f'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

4.35 La derivada de la función $f(x) = 6x^2 - (x+1)^3$ no cumple:

a) $f'(0) = -3.$
b) $f'(1) = 0.$
c) $f'(-1) = -8.$

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = 12x - 3\cdot(x+1)^2$$

Miramos la función derivada en $x = -1$

$$f'(-1) = 12\cdot(-1) - 3\cdot(-1+1)^2 = -12$$

4.36 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = t^2 - t$. La velocidad del móvil en el instante t es:

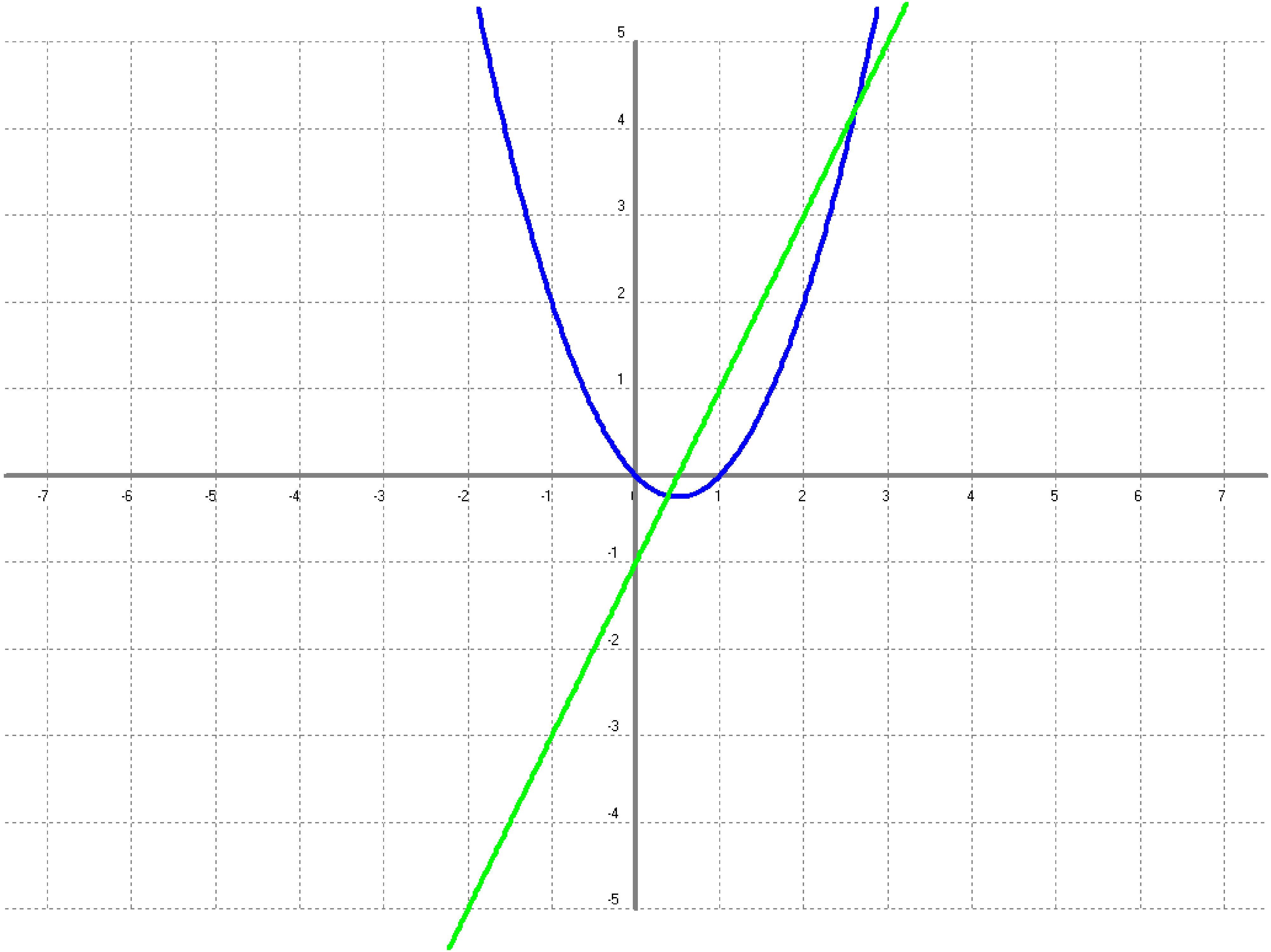
a) $v(t) = 2\mathrm{t} - 1$.

b) $v(t) = 2\mathrm{t} - 2/\mathrm{t}$.

c) $v(t) = \mathrm{t}2 - \mathrm{t}$.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$$v(t) = f'(t) = 2t - 1$$


5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.37 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = t^2 + t$. La velocidad del móvil en el instante $t=1$ es:

a) 1.

b) 2.

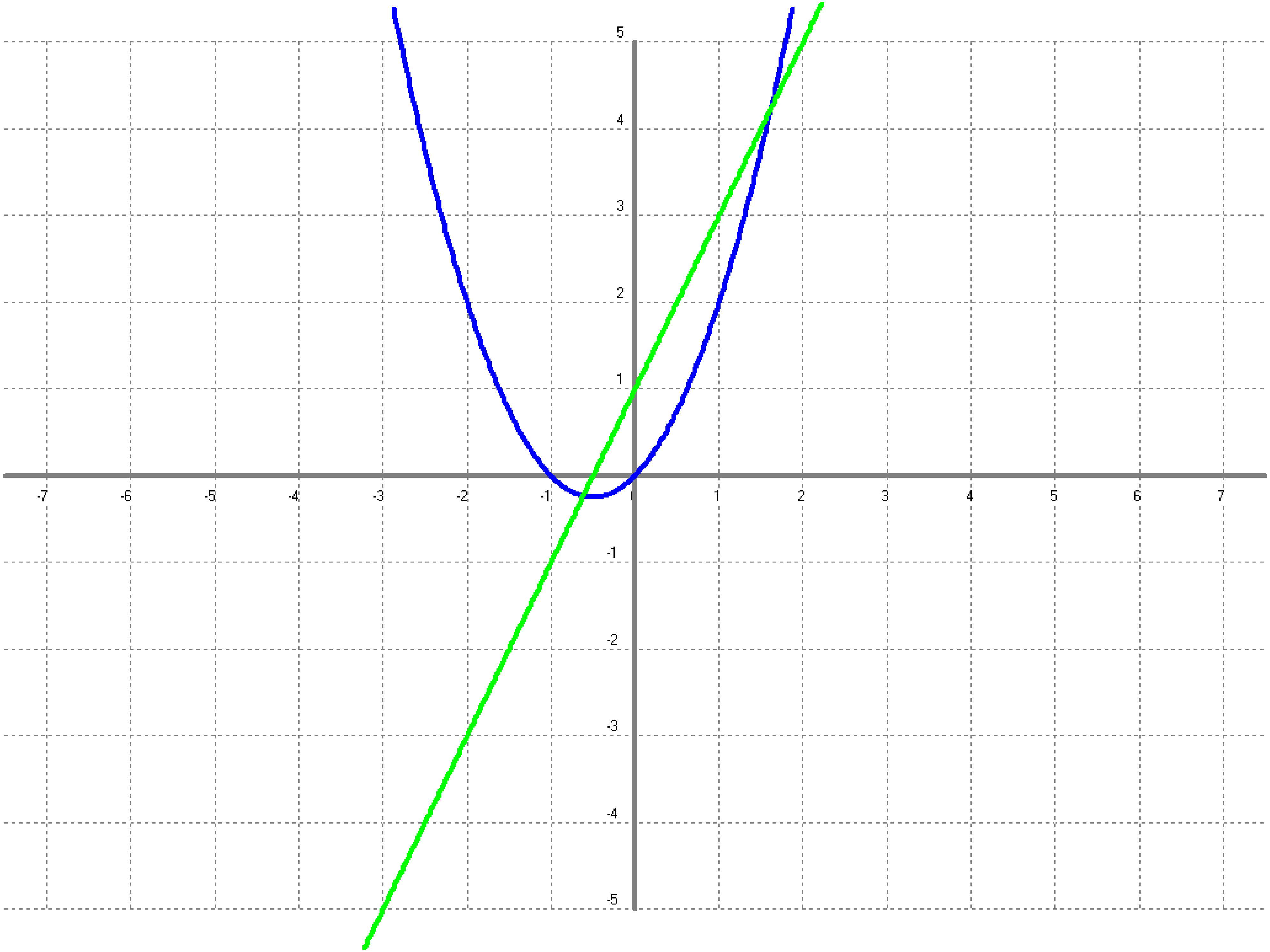
c) 3.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$$v(t) = f'(t) = 2t + 1.$$

La velocidad en el instante t = 1 es:

$$v(1) = f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$


5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.38 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = 3t - t^2$. Su posición en el instante en que su velocidad es 0 es:

a) 3/2.

b) 9/4.

c) 3/4.

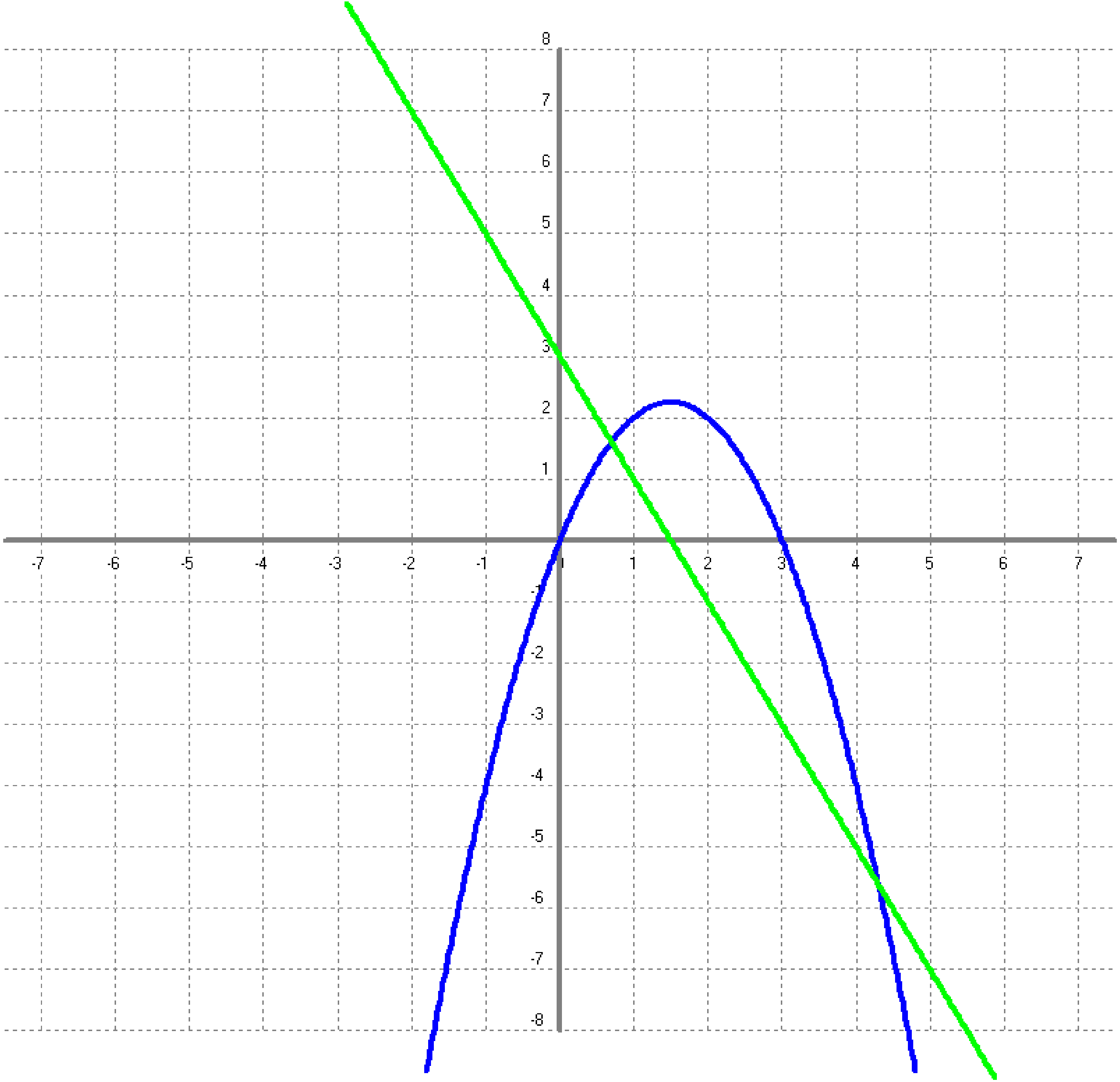
La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$$v(t) = f'(t) = 3 - 2t \, .$$

La velocidad es igual a 0 en el instante t que cumple 3−2t = 0, es decir t = 3/2.

En ese instante, la posición es

$$f(3/2) = 9/2 - 9/4 = 9/4 \, .$$



8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.39 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = 2t^3 - 3t$. La velocidad del móvil verifica:

a) $v(0) = -3$.

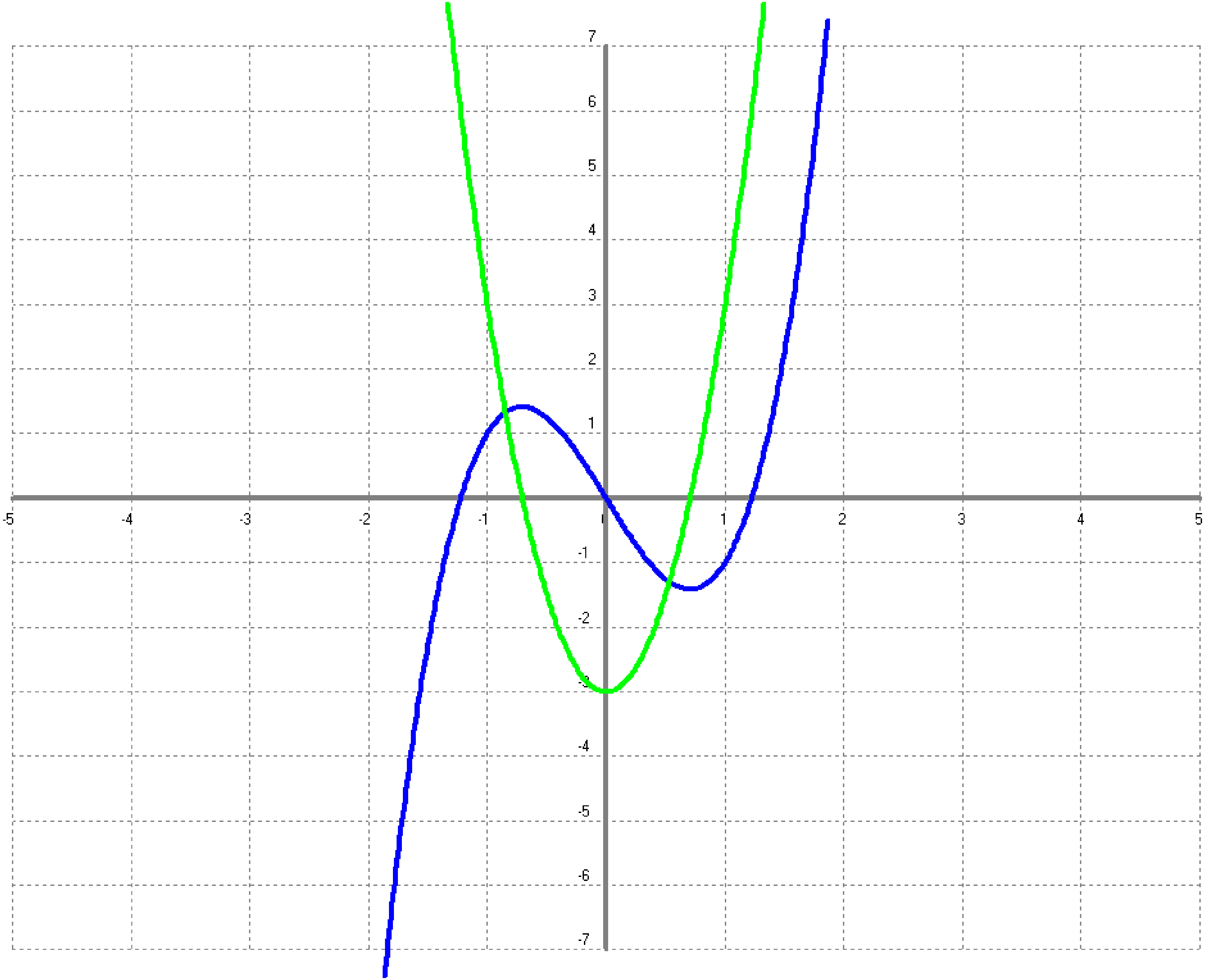
b) $v(1) = -3$.

c) $v\left(\sqrt{2}\right) = 8$.

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, por lo tanto:

$$v\left(t\right)=f'\left(t\right)=6t^2-3 \, .$$

v(0) = −3


7
6
5
4
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

4.40 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en el punto de abscisa $x = 1$ vale:

a) -1.

b) 1.

c) 2.

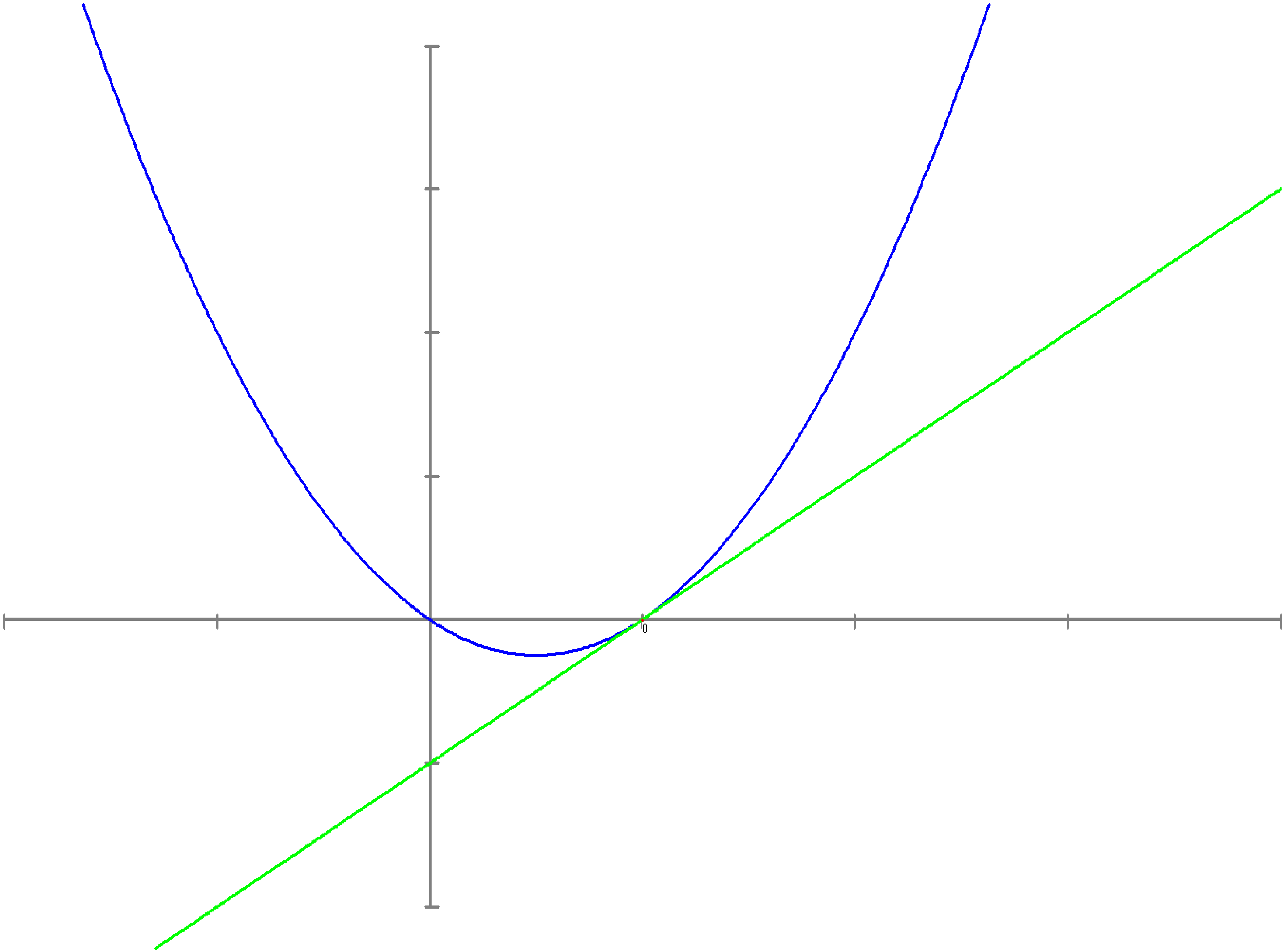
La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función $f(x)$ es igual al valor de la derivada en ese punto.

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = 2x - 1$$

Miramos la función derivada en x = 1

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$


0

4.41 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^3$ en el punto de abscisa $x = -1$ vale:

a) 1.

b) -8.

c) -7.

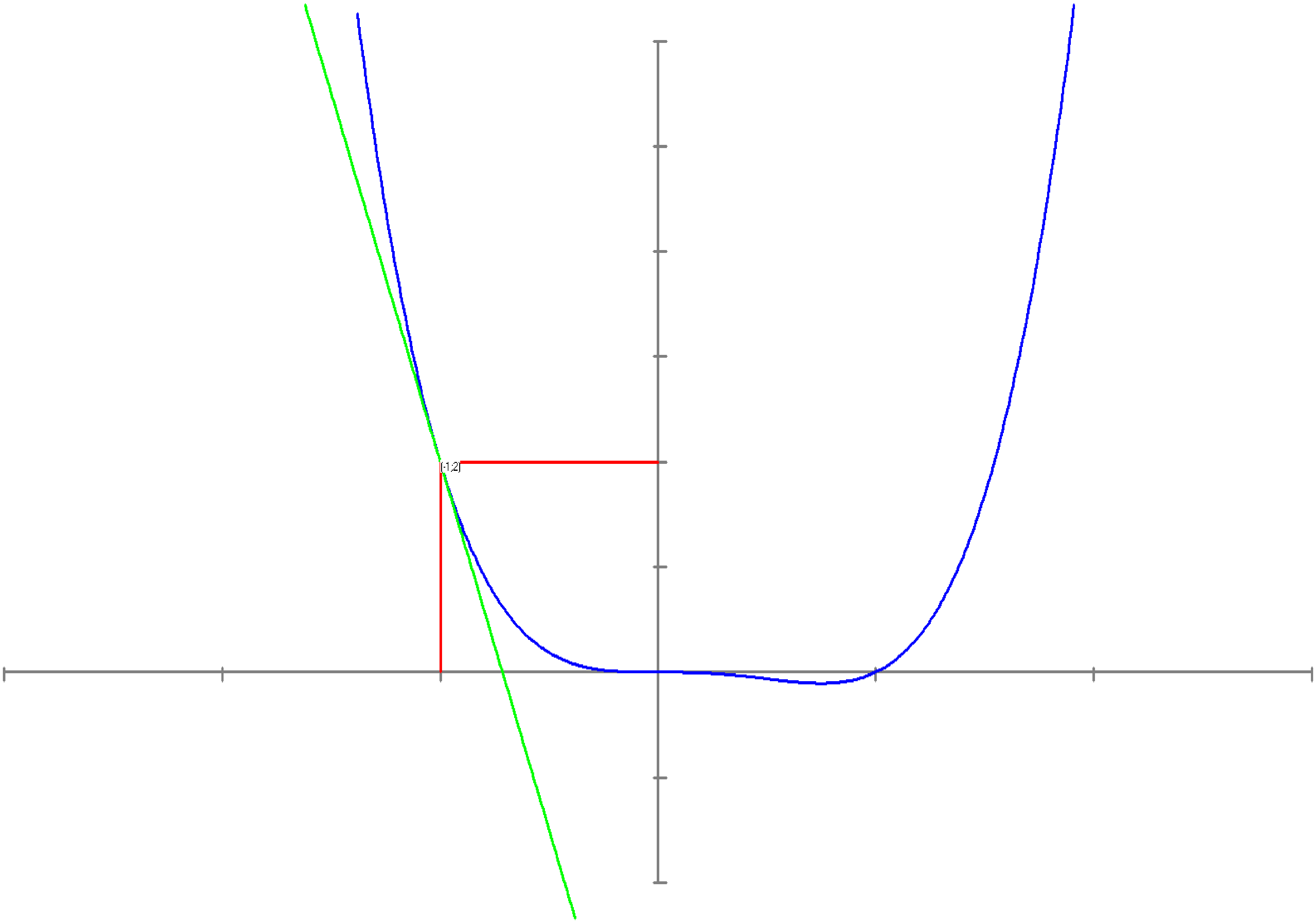
La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función f(x) es igual al valor de la derivada en ese punto.

Hacemos la derivada primera:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

Miramos la función derivada en x = –1

$$f'(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -7$$


(-1;2)

4.42 La tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+x+1$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$, en el punto de abscisa:

a) $x = -1/2$.

b) $x = 1/2$.

c) $x = -3/2$.

La recta $y = 2x - 3$, tiene como pendiente 2.

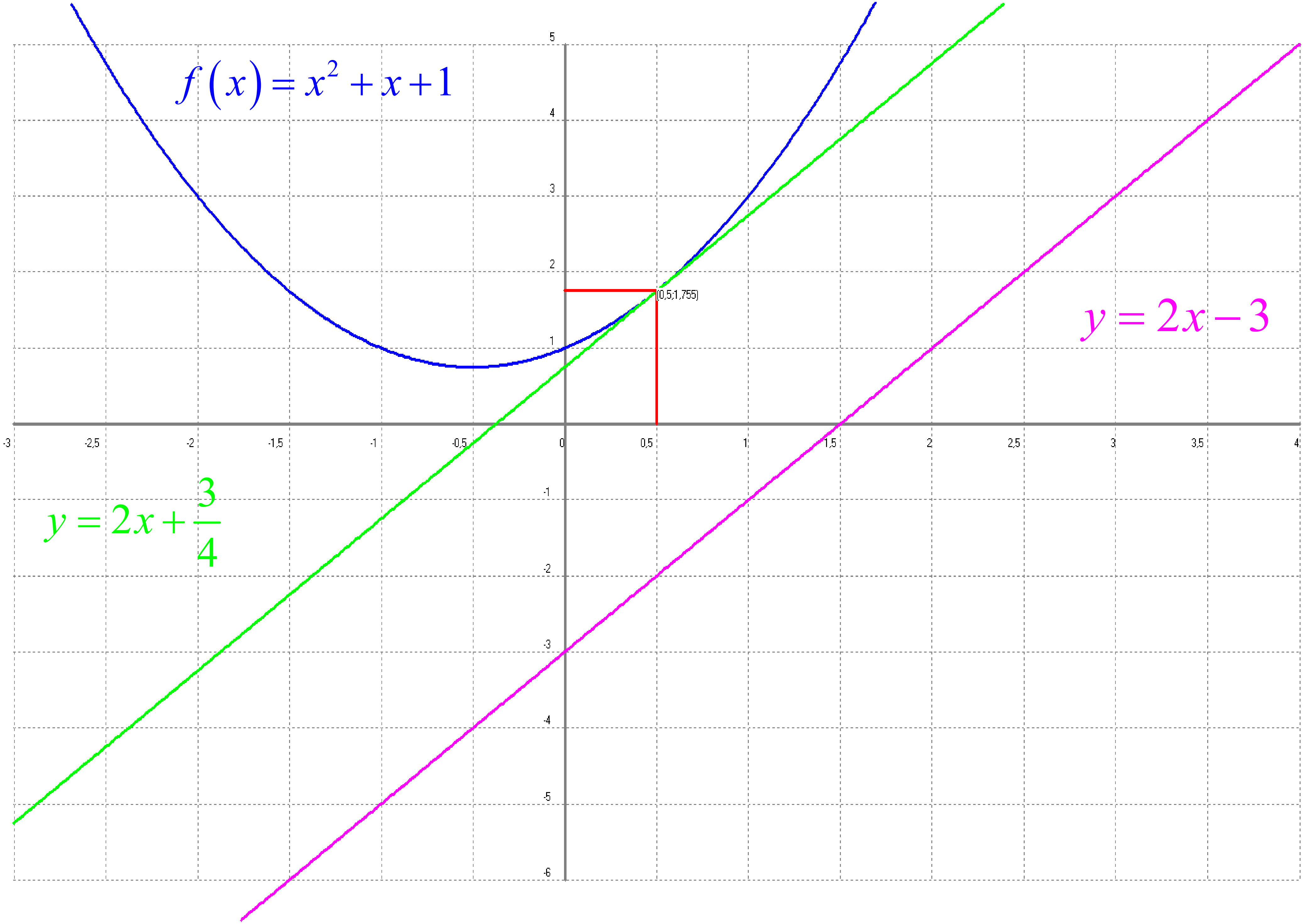
La derivada de la función $f(x)=x^2+x+1$ es:

$f'(x) = 2x + 1$

Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale 2, resolvemos la ecuación

$2x + 1 = 2$

$x = 1/2$



$f(x) = x^2 + x + 1$
$y = 2x - 3$
$y = 2x + \frac{3}{4}$
(0,5;1,755)

4.43 La tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ es perpendicular a la recta $y = x$, en el punto de abscisa:

a) $x = 1/2$

b) $x = 3/2$.

c) $x = -1/2$.

La recta $y = x$, tiene como pendiente 1.

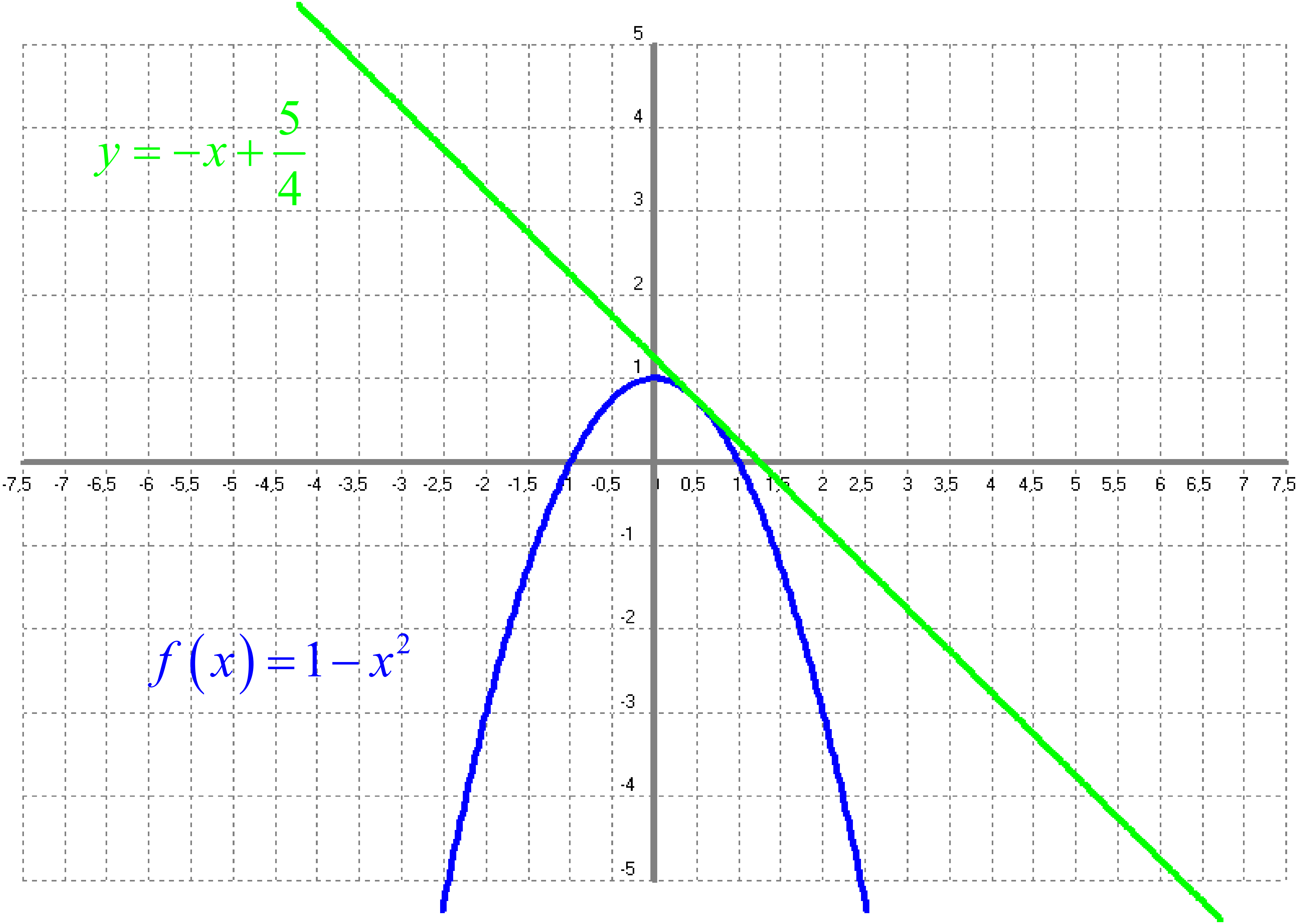
La derivada de la función $f(x) = 1 - x^2$ es:

$$f'(x) = -2x$$

Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale −1, resolvemos la ecuación

$$-2x = -1$$

$$x = 1/2$$



$y = -x + \frac{5}{4}$
$f(x) = 1 - x^2$

4.44 La tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 1$ tiene por ecuación:

a) $y = x + 2$.
b) $y = 2x - 3$.
c) $y = 3x - 1$.

La derivada de la función $f(x) = x^4 - 2x$ es:

$f'(x) = 4x^3 - 2$

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 2 = 2$

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0,(f(x_0)))$.

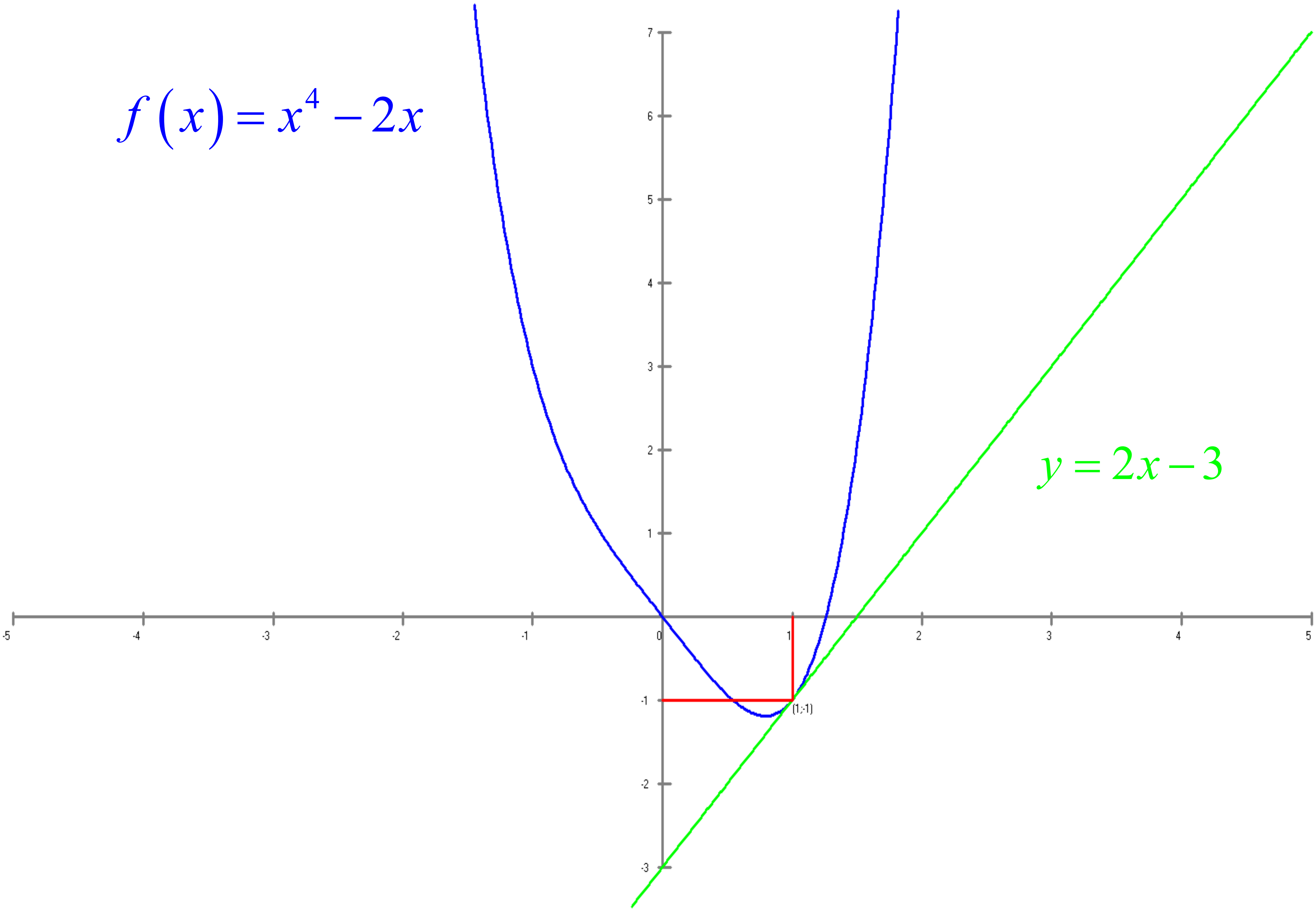
La ecuación de dicha recta tangente es

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ y además pasa por el punto $(x_0,(f(x_0)))$.

Punto $(1,-1)$

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = 2\cdot(x - 1) - 1 = 2x - 3$$



$f(x) = x^4 - 2x$
$y = 2x - 3$
(1;-1)

4.45 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=1/x$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, por el punto en que la recta $2x - 2y + 3 = 0$ tiene por ecuación:

a) $4y + x - 3 = 0$.
b) $4y + x - 4 = 0$.
c) $4x + y - 4 = 0$.

Primero calcularemos el punto en que la recta $2x - 2y + 3 = 0$ corta a la gráfica de la función y luego trazaremos la tangente a la gráfica por ese punto.

Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 1/x \\ 2x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \qquad 2x - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 = 0 \qquad 2x - 2 + 3x = 0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \qquad \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Como el intervalo de definición es $(0,\infty)$, comprobamos el punto de corte

$x = 1/2$, $f(1/2) = \dfrac{1}{1/2} = 2$

El punto de corte es (1/2, 2).

La derivada de la función $f(x)=1/x$ es

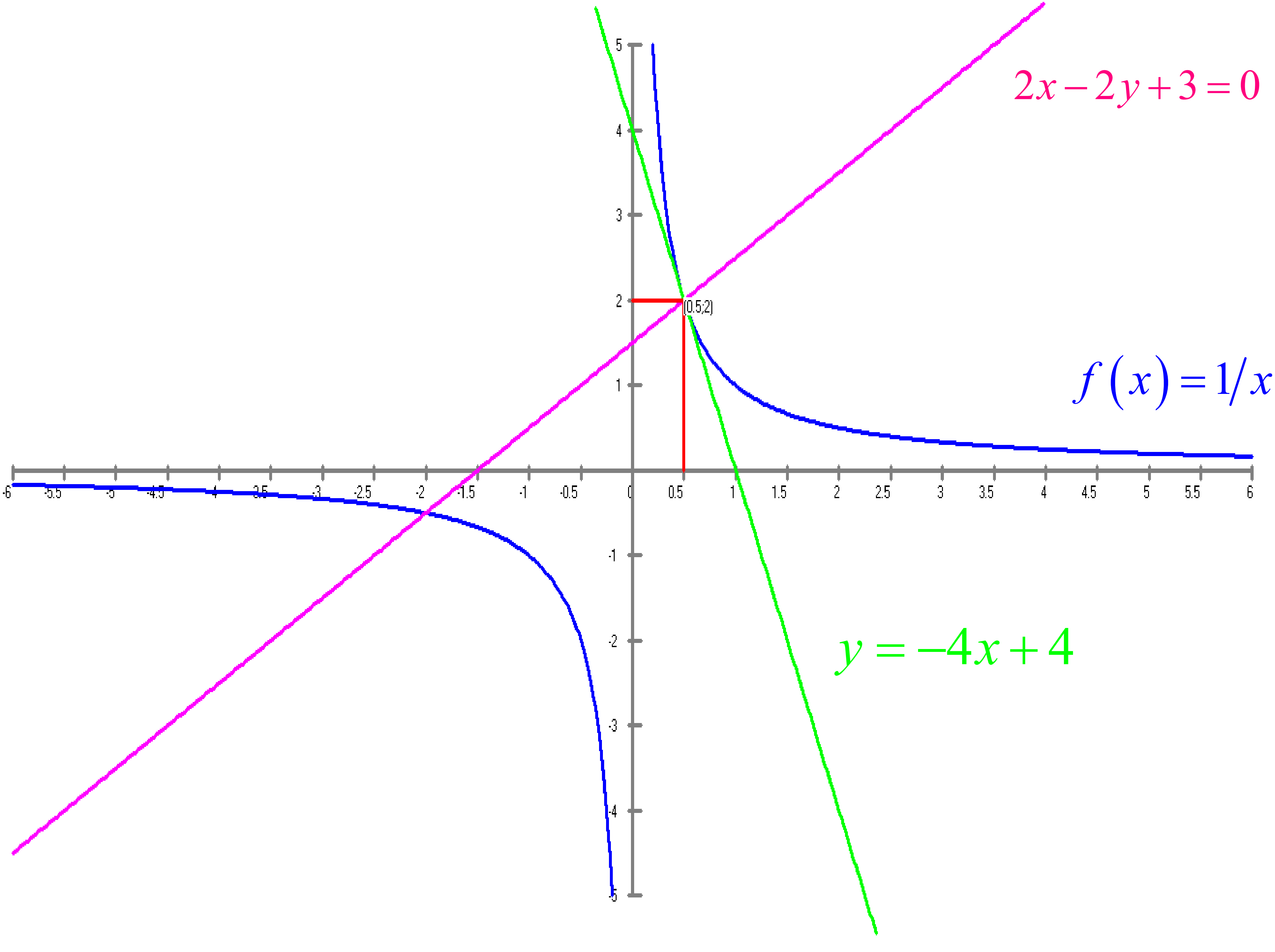
$$f'(x) = -1/x^2$$

La pendiente de la tangente es

$$f'(1/2) = -1\Big/(1/2)^2 = -4$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = -4 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \to 4x + y - 4 = 0$$



$2x-2y+3=0$
$f(x)=1/x$
$y=-4x+4$
(0.5;2)

4.46 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=1/x$ definida en el intervalo $(0,\infty)$, que es paralela a la recta $9x + y = 0$ tiene por ecuación:

a) $9x + y - 3 = 0$.
b) $9x + y - 6 = 0$.
c) $9x + y - 9 = 0$.

La recta $9x + y = 0$ tiene pendiente igual a -9.

Para hallar en qué punto la pendiente de la tangente a la gráfica tiene esa misma pendiente, hacemos:

La derivada de la función f(x) = 1/x es

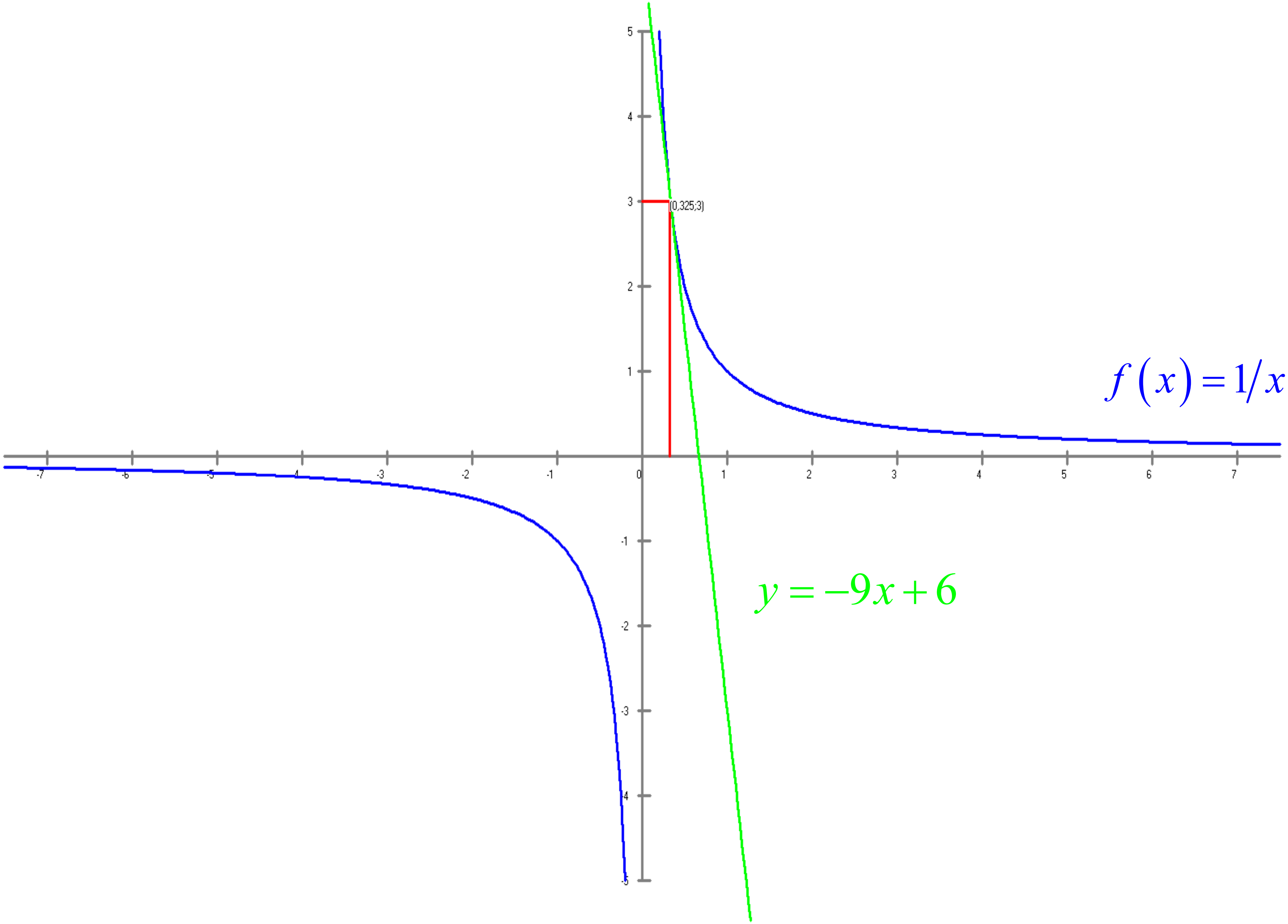
$$f'(x) = -1/x^2 = -9 \to x = 1/3$$

Y el punto tiene coordenadas (1/3, 3).

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 = -9 \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

$$9x + y - 6 = 0$$



$f(x) = 1/x$
$y = -9x + 6$
(0,325;3)

4.47 Si la tangente a la gráfica de la función $f(x_0)$, en el punto de abscisa $x = 2$, tiene por ecuación $3x - 2y + 4 = 0$ se verifica:

a) $f(2) = 5$ y $f'(2)\cdot= 1/2$.

b) $f(2) = 5$ y $f'(2)\cdot= 3/2$.

c) $f(2) = -5$ y $f'(2)\cdot= -3/2$.

La abscisa del punto de tangencia es $x = 2$.

La ecuación de la recta tangente:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

El valor de $f'(2)$ es igual a la pendiente de la recta tangente $f'(2)\cdot = 3/2$

$$y - f\left(2\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(x-2\right)$$

$$3x - 2y - 6 + 2f\left(2\right) = 0$$

$$-6 + 2f\left(2\right) = 4$$

$$f\left(2\right) = 5$$

4.48 La función $f(x)=1/x$, definida para $x \neq 0$, es:

a) Decreciente en el intervalo [1,2].
b) Creciente en el intervalo [−2,−1].
c) Creciente en el intervalo [1,2].

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

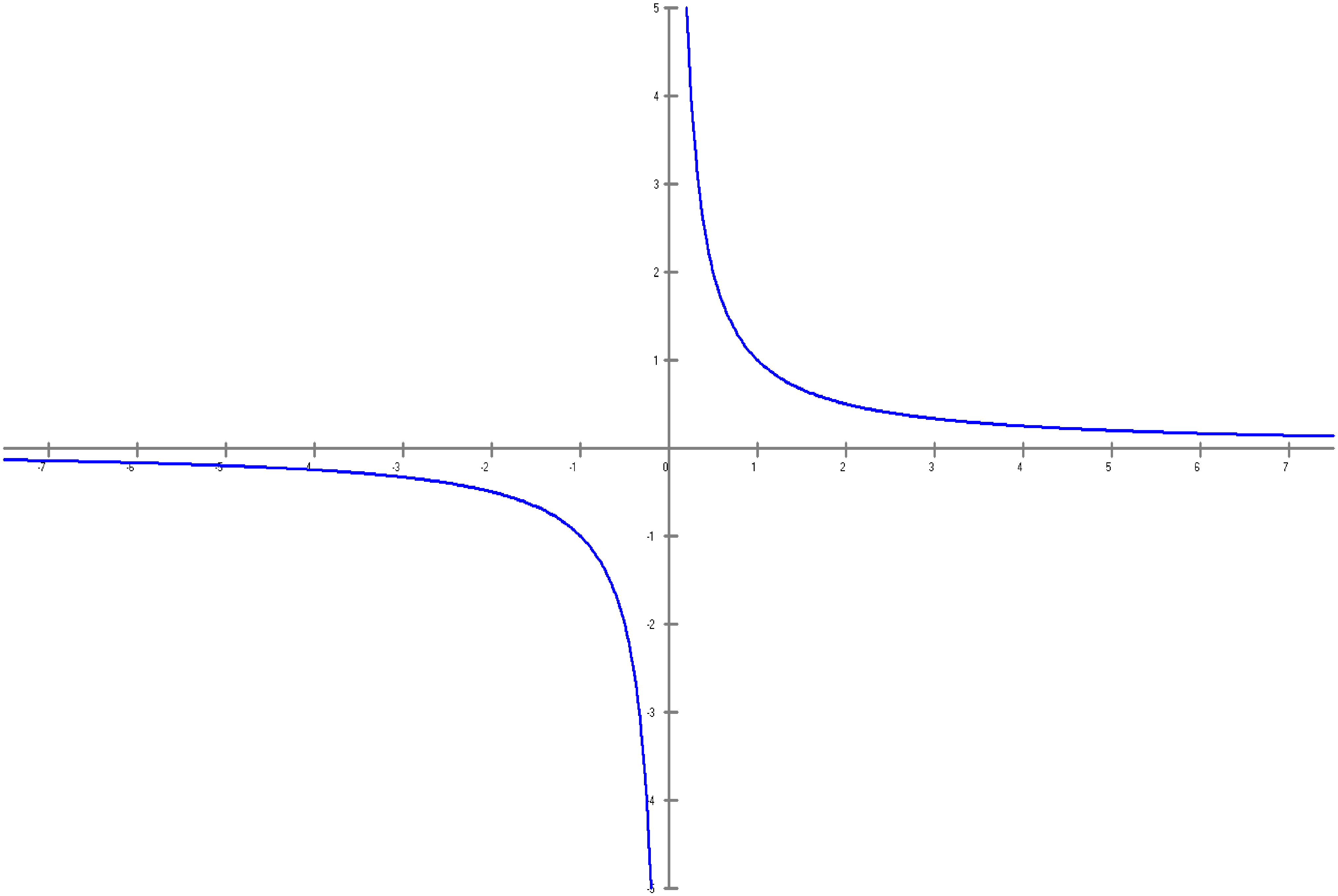
- Los intervalos de crecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los intervalos de decrecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

La derivada de la función f(x)=1/x es $f'(x) = -1/x^2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = -1/1^2 = -1 \\ f'(2) = -1/2^2 = -0,25 \end{array}\right\} f' \leq 0$$ Intervalos de decrecimiento

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2) = -1/(-2)^2 = -0,25 \\ f'(-1) = -1/(-1)^2 = -1 \end{array}\right\} f' \leq 0$$ Intervalos de decrecimiento

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = -1/1^2 = -1 \\ f'(2) = -1/2^2 = -0,25 \end{array}\right\} f' \leq 0$$ Intervalos de decrecimiento



5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.49 La derivada segunda de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ es igual a:

a) $3x - 1$.

b) $6x - 2$.

c) $3x^2 - 2x + 1$.

Derivada primera:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 2$$

4.50 La derivada segunda de la función en el punto $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ de abscisa $x = 4$ vale:

a) $-1/2$.

b) $-1/4$.

c) $1/8$.

Derivada primera:

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Derivada segunda:

$$f''(x) = 0 - \frac{0 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{8}$$

4.51 La función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tiene un mínimo relativo en:

a) $x = 2$.
b) $x = 3/2$.
c) $x = -1/2$.

Hacemos la primera derivada e igualamos a 0.

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$2x - 3 = 0$$

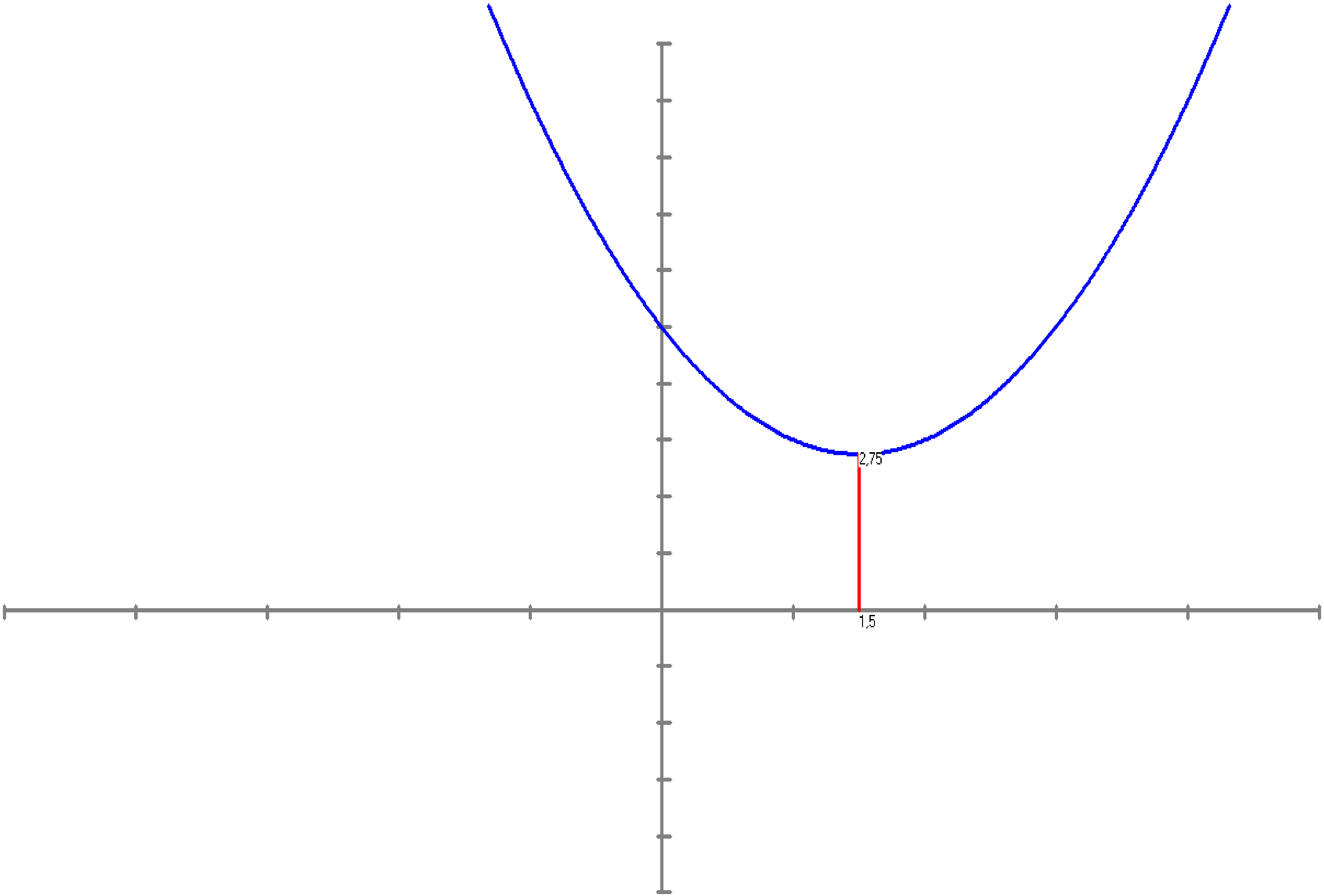
$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

En x = 3/2 tenemos un máximo o mínimo relativo.

Ahora hacemos la segunda derivada para comprobarlo.

$$f''(x) = 2 > 0$$

Como 2 es mayor que 0 entonces tenemos un mínimo relativo.



x = 1,5   y = 2,75

4.52 La función $f(x) = x^3 - 3x + 6$ tiene un máximo relativo en:

a) $x = 1$.
b) $x = -1$.
c) $x = 0$.

Hacemos la primera derivada e igualamos a 0.

$f(x) = x^3 - 3x + 6$

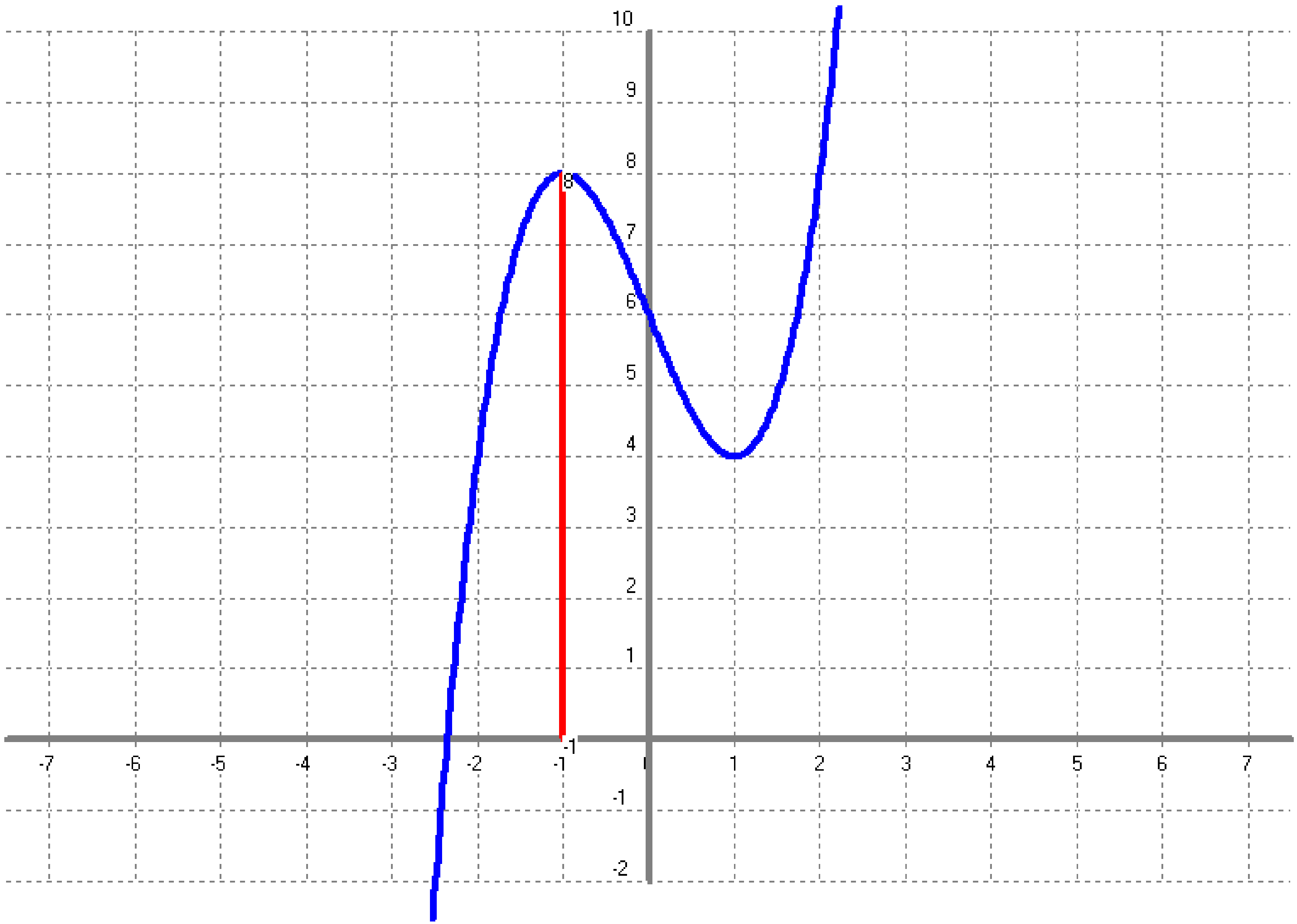
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$, existe un máximo o un mínimo.

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0$, hay un mínimo.

$f''(-1) = -6 < 0$, hay un máximo.



Máximos

4.53 La función $f(x) = x^3 - x^2$ en el intervalo [1,2]:

a) Es convexa.
b) Es cóncava.
c) No es cóncava ni convexa.

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los intervalos de crecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los intervalos de decrecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

Hacemos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

La pendiente de la recta tangente es 1

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 > 0$$

La pendiente de la recta tangente es 8

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

Como la pendiente de la recta tangente crece en el intervalo [1,2] la función es convexa.

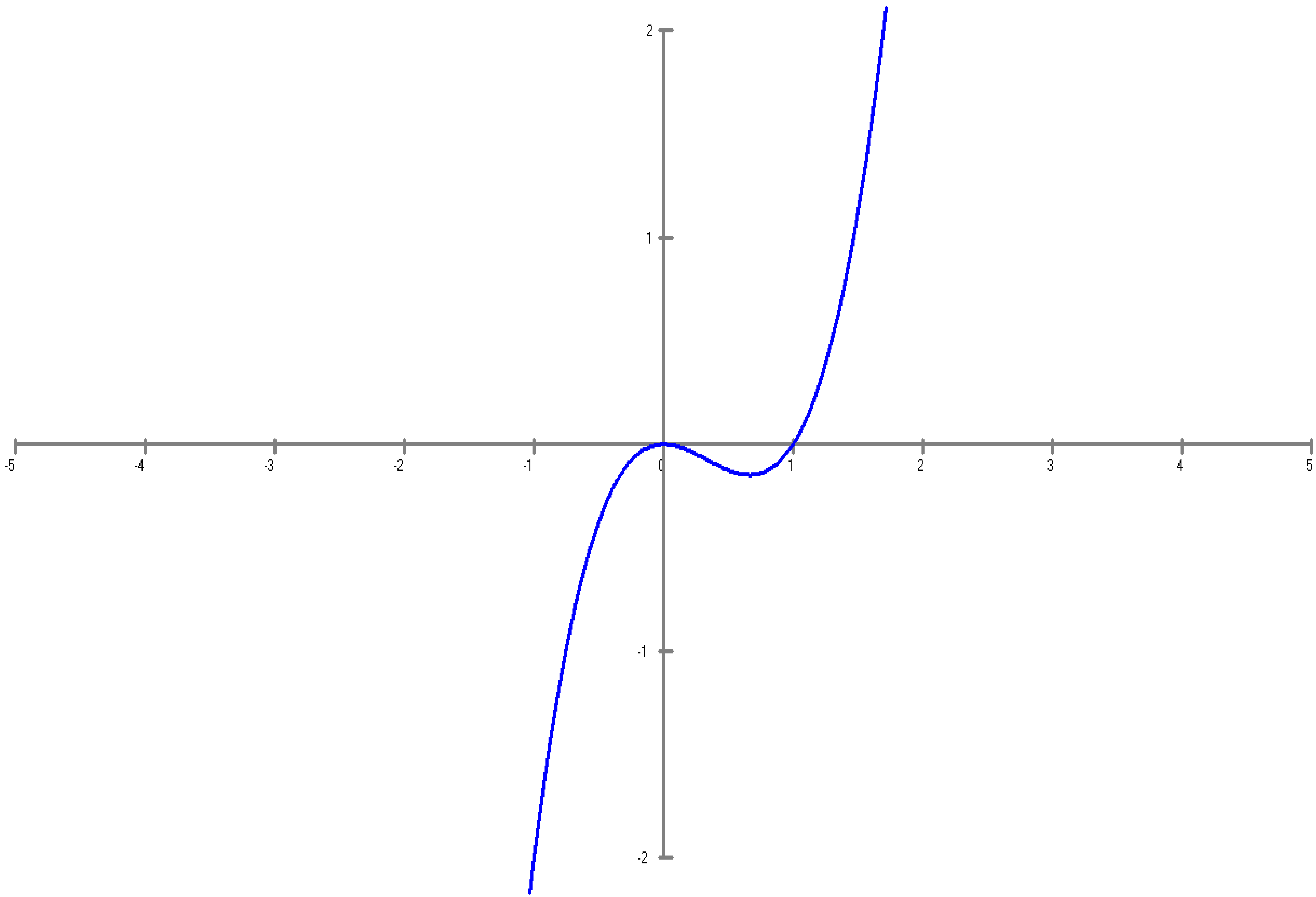
Derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva en el intervalo [1,2] y deducimos que la primera derivada es creciente en el intervalo [1,2].


2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

4.54 La función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo (0, ∞):

a) Es convexa.
b) Es cóncava.
c) No es cóncava ni convexa.

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

Hacemos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Si la función que obtenemos de la segunda derivada la igualamos a 0 tenemos como soluciones:

$$\frac{2\cdot\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \qquad \begin{cases} x=-1/\sqrt{3} \\ x=1/\sqrt{3} \end{cases}$$

Quiere decir que en estos dos puntos hay un ***punto de inflexión***, es decir un cambio de curvatura, por lo tanto vamos a ver cómo se comporta la función antes y después de este punto, en concreto en $x = 1/\sqrt{3}$ ya que el intervalo de definición es $(0, \infty)$.

Tomamos la primera derivada para hacer el estudio,

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Primero miramos el intervalo $\left(0,1/\sqrt{3}\right)$

$$f'\left(0,2\right)=\frac{-2\cdot\left(0,2\right)}{\left(1+\left(0,2\right)^2\right)^2}=-0,3698$$

$$f'\left(0,4\right)=\frac{-2\cdot\left(0,4\right)}{\left(1+\left(0,4\right)^2\right)^2}=-0,5945$$

Como la pendiente decrece la función es ***cóncava****.*

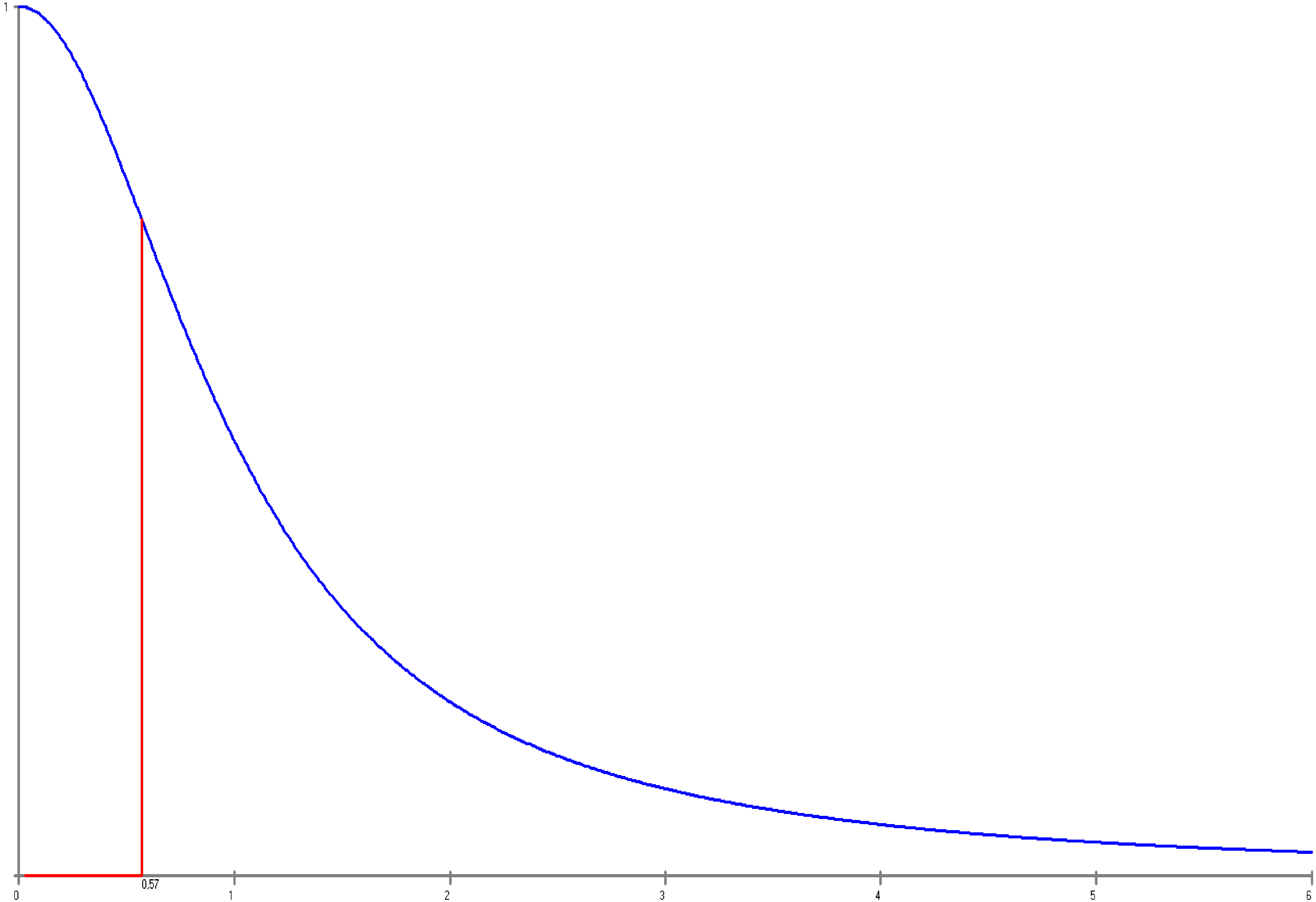
Segundo paso miramos el intervalo $\left(1/\sqrt{3},+\infty\right)$

$$f'\left(0,6\right)=\frac{-2\cdot\left(0,6\right)}{\left(1+\left(0,6\right)^{2}\right)^{2}}=-0,6487$$

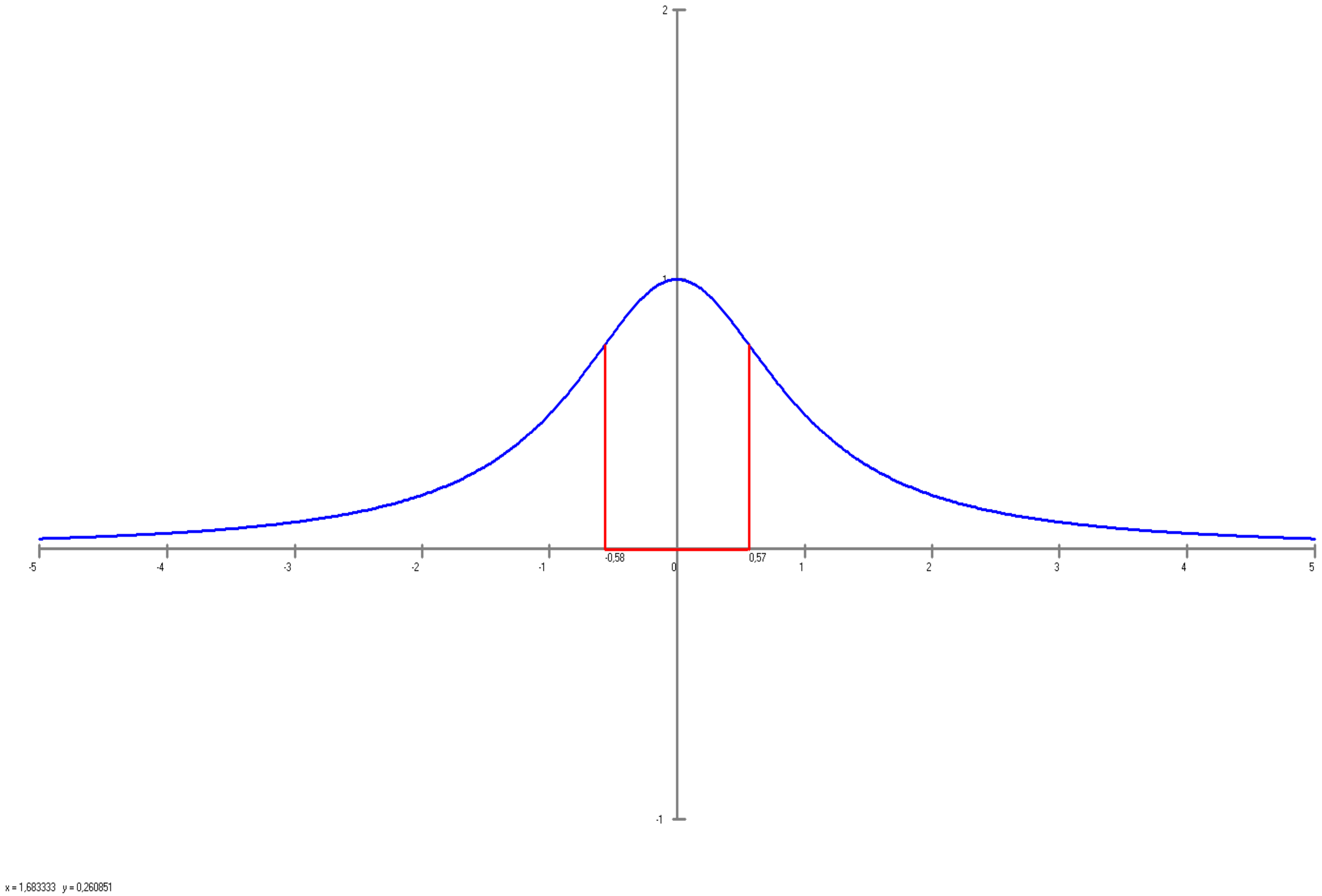
$$f'\left(1\right)=\frac{-2\cdot\left(1\right)}{\left(1+\left(1\right)^{2}\right)^{2}}=-0,5$$

$$f'\left(2\right)=\frac{-2\cdot\left(2\right)}{\left(1+\left(2\right)^{2}\right)^{2}}=-0,16$$

Como la pendiente crece la función es ***cónvexa****.*



x = 0,83 y = 0,592101


2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
-0,58
0
0,57
1
2
3
4
5
x = 1,683333   y = 0,260851

4.55 La función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo (0, ∞):

a) Creciente.
b) Es convexa.
c) Es cóncava

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los intervalos de crecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los intervalos de decrecimiento coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

Hacemos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

La pendiente de la recta tangente es -1

$$f'(1)=\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{1}=-1<0$$

La pendiente de la recta tangente es $-0,\overset{\frown}{1}$

$$f'(3)=\frac{-1}{3^2}=\frac{-1}{9}=-0,\overset{\frown}{1}<0$$

La pendiente de la recta tangente es $-0,04$

$$f'(5)=\frac{-1}{5^2}=\frac{-1}{25}=-0,04<0$$

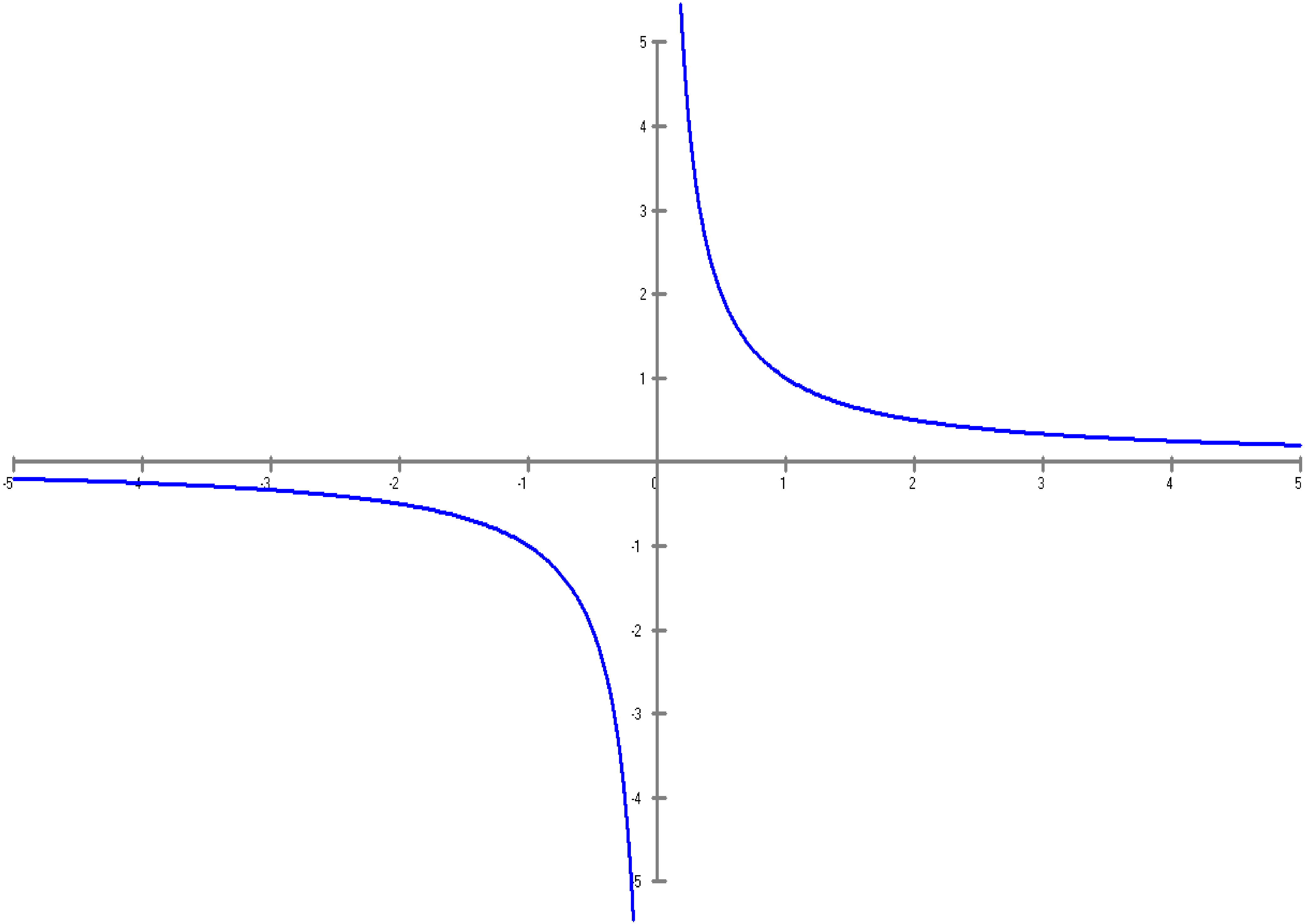
$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

$$f''(5) = \frac{2}{5^3} = 0,016 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva en el intervalo $(0, \infty)$ y deducimos que la primera derivada es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ crece y la función es convexa


5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5