ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Matemáticas Aplicadas Ciencias Sociales

Autor: Antonio Rivero Cuesta

TEMA 1 FUNDAMENTOS

1.1 LÓGICA DE PROPOSICIONES.

1.1.1 Proposiciones.

Proposición, oración que siempre podemos afirmar que es verdadera o falsa.
Proposición simple, se limita a enunciar una cualidad de un ser o cosa.
Proposición compuesta, se obtiene combinando una o más proposiciones simples.

1.1.2 Conectores lógicos. Ejercicios (1.1-1.15)

Se utilizan para combinar proposiciones simples.
Un **conector lógico** es una partícula que se utiliza para formar las proposiciones compuestas.
Están ordenadas por orden de preferencia. Las conexiones lógicas son:

Negación	$\neg$	$\neg p$
Conjunción	$\wedge$	$p\wedge q$
Disyunción	$\vee$	$p\vee q$
Condicional	$\rightarrow$	$p\rightarrow q \equiv \neg p\vee q$

Una tabla de verdad representa todas las posibilidades lógicas que pueden tomar las proposiciones simples, son 2^n.
Variables proposicionales: p, q, r…
Constantes proposicionales: V, F.

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

1.1.3 Cálculo de valores de verdad.

Construcción de tablas de verdad.

1.1.4 Razonamientos. Ejercicios (1.16-1.16)

Un razonamiento es una afirmación de una proposición que llamamos ***conclusión*** y que deducimos de unas proposiciones que se llaman ***premisas***.
Un razonamiento es ***lógicamente válido*** si siempre que las premisas son verdaderas lo es también la conclusión. Un razonamiento que no es lógicamente válido se llama ***falacia***.
Las premisas implican lógicamente la conclusión, es decir, un razonamiento será válido cuando $p_1 \wedge p_2 \wedge ... p_n \rightarrow q$
Para probar la validez de un razonamiento se forma la tabla de verdad de las premisas y la conclusión y se comprueba que siempre que las premisas toman el valor de verdad V también la conclusión toma el valor de V.
Para mostrar que un razonamiento no es lógicamente válido basta encontrar un caso en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Reglas de inferencia.

Lo que afirma cada regla es que una estructura lógica produce siempre razonamientos válidos, cualesquiera que sean las proposiciones particulares que se sustituyan.

Modus ponendo ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ q \end{array}$$

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \to q$	p	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Para analizar la validez del razonamiento, formamos la tabla de verdad y se observa que siempre que las premisas p y $p \to q$ son verdaderas también lo es la conclusión q. Por lo tanto el razonamiento es lógicamente válido.

Modus tollendo tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \neg p \end{array}$$

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Modus tollendo ponens

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ p \end{array}$$

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
V	V	V	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Silogismo hipotético

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

			Premisas		Conclusión
p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Una deducción o demostración es el proceso que partiendo de las premisas nos lleva a la conclusión a través de una serie de proposiciones intermedias obtenidas a partir de las reglas de inferencia.

1.2 CONJUNTOS

1.21 Conceptos básicos. Ejercicios (1.17-1.21), (T6 - 1.1 - 1.3, 2.1 - 2.3, 3.5, 5.11 - 5.14, 9.7 - 9.8)

Los **conjuntos** se representan con letras mayúsculas, A, B,C ,…
Los **elementos** se representan con minúsculas, *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*.

Relación de pertenencia:

- El elemento *a* pertenece al conjunto X, $a \in X$
- El elemento *a* no pertenece al conjunto Z, $a \notin Z$

Formas de definir un conjunto:

- Enumeración: enumeramos todos y cada uno de los elementos.
- Descripción: definimos alguna característica común a todos los elementos.

Conjuntos definidos por ***enumeración***:

S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
V = {a, e, i, o, u}

Conjuntos definidos por ***descripción***:

S = {días de la semana}
V = {vocales del español}

Por descripción podemos definir de la siguiente manera los conjuntos:

$$V = \left\{ x \in A \middle| x \text{ es vocal} \right\}$$

V es el conjunto de los elementos *x* que pertenecen al conjunto de las letras del alfabeto español *A*, tales que *x* es una vocal.

Relación de inclusión:
Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está incluido en B y se escribe $A \subset B$ cuando todos los elementos de A pertenecen a B.
Si A está contenido en B se dice que A es un subconjunto de B o que A es una parte de B.

Propiedades de la inclusión de conjuntos.

- **Reflexiva:** todo conjunto A está contenido en sí mismo.
  $A \subset A$.

- **Transitiva:** Si un conjunto A está contenido en otro B, y B está contenido en otro conjunto C, entonces A está contenido en C.
  Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces son iguales $A = B$.

Conjunto universal, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos que se analizan en un determinado contexto y se representa por *U*.

Conjunto vacío es un conjunto que no tiene elementos, se representa por $\varnothing$.

Cualquiera que sea el conjunto A se cumple $\varnothing \subset A$.

El **conjunto de las partes** de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Se representa por $P(A)$.

Si el conjunto A tiene *n* elementos, el conjunto de las partes de A tiene 2^n elementos.

DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados diagramas de Venn. El conjunto universal lo representamos por un rectángulo y los conjuntos por círculos dentro del conjunto universal.

1.2.2 Operaciones con conjuntos. Ejercicios (1.22-1.31)

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los comunes a ambos conjuntos, se representa por $A \cap B$.

Dos **conjuntos son disjuntos** si no tienen elementos comunes, $A \cap B = \varnothing$.

La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los que pertenecen a alguno de los conjuntos, se representa por $A \cup B$.

El **conjunto complementario** de A está formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A, se representa por A^C.

La **diferencia** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, se representa por $A - B$.

La diferencia de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de A con el complementario de B, se representa por $A - B = A \cap B^C$.
Cuando $A - B = A$ o $B - A = B$ entonces $A \cap B = \varnothing$.

1.2.3 Propiedades de las operaciones con conjuntos.

Propiedades de la intersección.

La intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío es igual al conjunto vacío, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

La intersección de cualquier conjunto con el universal es el mismo conjunto, $A \cap U = A$.

Idempotencia: La intersección de cualquier conjunto consigo mismo es igual al mismo conjunto, $A \cap A = A$.

Conmutativa: La intersección de un conjunto A con otro B es igual a la intersección de B con A, $A \cap B = B \cap A$.

Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

La intersección de dos conjuntos está contenida en cualquiera de los conjuntos que se intersectan, $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.

Si B está contenido en A, entonces la intersección de A y B es igual a B, Si $B \subset A$ entonces $A \cap B = B$.

Propiedades de la unión.

La unión de cualquier conjunto con el conjunto vacío es igual al conjunto, $A \cup \varnothing = A$.

La unión de cualquier conjunto con el universal es igual al conjunto universal, $A \cup U = U$.

Idempotencia: La unión de cualquier conjunto consigo mismo es igual al mismo conjunto, $A \cup A = A$.

Conmutativa: La unión de un conjunto A con otro B es igual a la unión de B con A, $A \cup B = B \cup A$.

Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

La unión de dos conjuntos contiene a cualquiera de los conjuntos que se unen, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.

Si B está contenido en A, entonces la unión de A y B es igual a A, Si $B \subset A$ entonces $A \cup B = A$.

Propiedades de la complementación.

El complementario del conjunto vacío es el conjunto universal, $\varnothing^C = U$.

El complementario del conjunto universal es el conjunto vacío, $U^C = \varnothing$.

El complementario del complementario de un conjunto es el mismo conjunto, $\left(A^C\right)^C = A$.

Propiedades que relacionan varias operaciones.

La intersección de un conjunto y su complementario es igual al conjunto vacío, $A \cap A^C = \varnothing$.

La unión de un conjunto y su complementario es igual al conjunto universal, $A \cup A^C = U$.

Propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Primera ley de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Segunda ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Dados dos conjuntos cualesquiera A, B y C se cumple:
$A \cup B = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right) = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$.

Dados tres conjuntos cualesquiera a y b se cumple:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C = {} & (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap B \cap C^C\right) \cup \left(A \cap B^C \cap C\right) \cup \left(A^C \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap B^C \cap C^C\right) \\ & \cup \left(A^C \cap B \cap C^C\right) \cup \left(A^C \cap B^C \cap C\right) \end{aligned}$$

Resumen de las propiedades

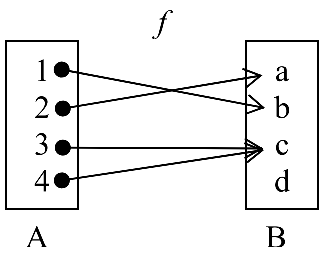
$A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap U=A$ $A\cap A=A$ $A\cap B=B\cap A$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ $A\cap B\subset A \qquad A\cap B\subset B$ Si $B\subset A$ entonces $A\cap B=B$ $A\cup\varnothing=A$ $A\cup U=U$ $A\cup A=A$ $A\cup B=B\cup A$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $A\subset A\cup B \qquad B\subset A\cup B$ Si $B\subset A$ entonces $A\cup B=A$ $\varnothing^C=U$ $U^C=\varnothing$	$\left(A^C\right)^C=A$ $A\cap A^C=\varnothing$ $A\cup A^C=U$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ $A\cup B=(A\cap B)\cup\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A^C\cap B\right)$ $\qquad=(A\cap B)\cup(A-B)\cup(B-A)$ $A\cup B\cup C=(A\cap B\cap C)\cup\left(A\cap B\cap C^C\right)\cup\left(A\cap B^C\cap C\right)$ $\cup\left(A^C\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap B\cap C^C\right)$ $\cup\left(A^C\cap B^C\cap C\right)$

1.3 APLICACIONES.

1.3.1 Concepto de aplicación. Ejercicios (1.47-1.51)

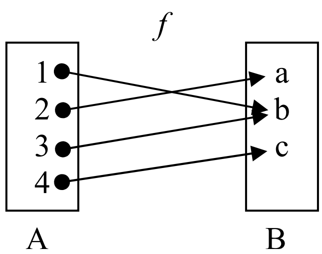
Una **aplicación** entre dos conjuntos A y B es una transformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.

El conjunto A se llama conjunto inicial o dominio de la aplicación.
El conjunto B se llama conjunto final o rango de la aplicación.
Las aplicaciones suelen designarse por las letras *f, g, h* y se representan por $f : A \mapsto B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
Si el elemento $x \in A$ se transforma en el elemento $y \in B$ se escribe $y = f(x)$, se dice que y es la imagen de x mediante la aplicación f.



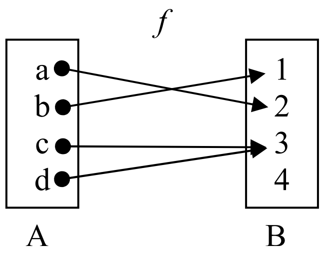
1.3.2 Imagen e inversa de un Subconjunto.

Sea $f : A \mapsto B$ una aplicación y $C \subset A$. Se denomina ***imagen*** del subconjunto C al conjunto de las imágenes de los elementos de C. la imagen de C se representa por $f(C)$



En esta aplicación la imagen del subconjunto $C = \{1,2,3\} \subset A$ es igual $f(C) = \{a,b\} \subset B$

Sea $f : A \mapsto B$ una aplicación y $D \subset B$. Se denomina ***imagen inversa*** del subconjunto D al subconjunto formado por las preimagenes de los elementos de D, se representa por $f^{-1}(D)$



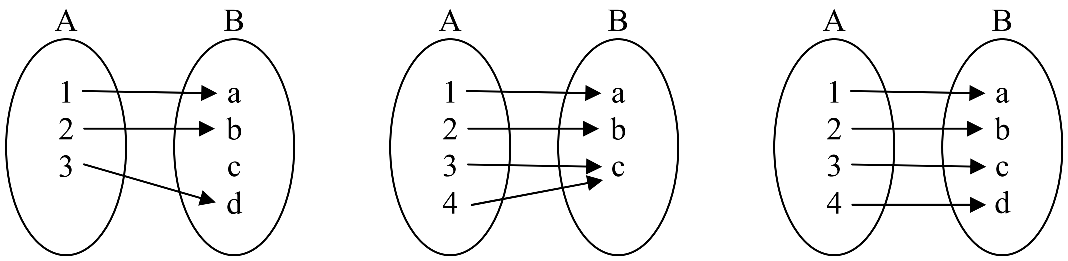
En esta aplicación la imagen inversa del subconjunto $D = \{1,3\} \subset B$ es igual $f^{-1}(D) = \{b,c,d\} \subset A$

1.3.3 Tipos de aplicación.

Una aplicación $f : A \to B$ es ***inyectiva*** si a cada valor del conjunto A le corresponde un valor distinto en el conjunto B de *f*. Es decir, a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo valor de B tal que, en el conjunto A no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

Una aplicación $f : A \to B$ es, ***sobreyectiva*** cuando cada elemento de "B" es la imagen de como mínimo un elemento de "A".

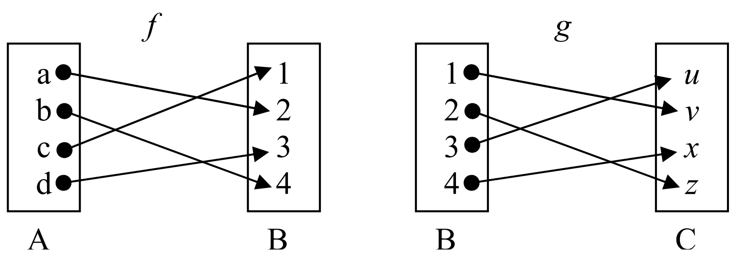
Una aplicación $f : A \to B$ es, ***biyectiva*** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.



Inyectiva Sobreyectiva Biyectiva

1.3.4. Composición de aplicaciones.

Si tenemos dos aplicaciones: *f(x)* y *g(x)*, de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de *f(x)* el valor de *g[f(x)]*.



$$a \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} z$$
$$b \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} x$$
$$c \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} v$$
$$d \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} u$$

1.4 CARDINAL DE UN CONJUNTO.

El **cardinal** de un conjunto A es su número de elementos y se representa por $\#(A)$.

1.4.1 Cálculo de cardinales con dos conjuntos. Ejercicios (1.53-1.65)

Si dos conjuntos A y B son disjuntos, el cardinal de la unión es igual a la suma de los cardinales.

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$

Si A y B son dos conjuntos, siempre se cumple que el cardinal de su unión $(A \cup B)$ es igual al cardinal de A más el cardinal de B menos el cardinal de la intersección $(A \cap B)$.

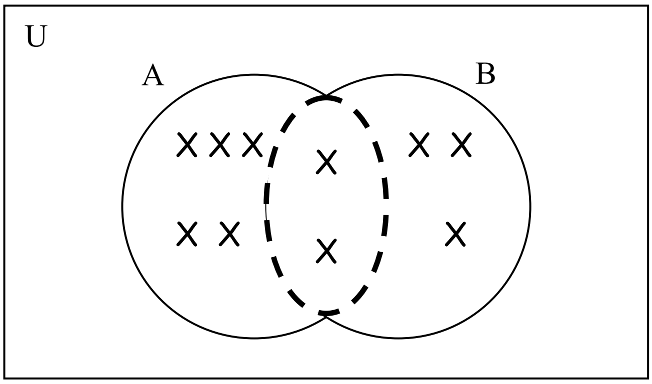
$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Podemos razonar la fórmula de otra manera:

$$\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B)$$

Tenemos que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, siendo $(A - B)\, y\, (A \cap B)$ disjuntos, por lo tanto:

$\# A = \#(A - B) + \#(A \cap B)$ y
$\# B = \#(B - A) + \#(A \cap B)$



$\#(A) = 7$ $\quad$ $\#(B) = 5$
$\#(A \cup B) = 10$ $\quad$ $\#(A \cap B) = 2$
$\#(A - B) = 5$ $\quad$ $\#(B - A) = 3$

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) \rightarrow 10 = 7 + 5 - 2$$
$$\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B) \rightarrow 10 = 5 + 3 + 2$$
$$\# A = \#(A - B) + \#(A \cap B) \rightarrow 7 = 5 + 2$$

TEMA 2 ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

2.1 NÚMEROS NATURALES.

2.1.1 Concepto de número natural. Ejercicios (2.1-2.2)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

2.1.2 Operaciones con números naturales.

- Suma.
- Resta.
- Multiplicación.
- División.

2.1.3 Sistemas de numeración. Ejercicios (2.3-2.22)

En los sistemas posicionales el valor de un símbolo depende de su posición respecto de los demás.

En la ***potencia*** 10^3, el 10 es la base y el 3 es el exponente y es igual a $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Cualquier número natural ***b*** puede ser base de un sistema de numeración.
Un sistema de numeración de base *b* necesita de *b* símbolos que hagan el papel de cifras del sistema.

Cambio de base: calcular la expresión de un número en un sistema de numeración a partir de su expresión en otro sistema.

A base decimal. $(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$

De base decimal a otra.

$$\begin{array}{r|l} 432 & 11 \\ \cline{2-2} 3 & \begin{array}{r|l} 39 & 11 \\ \cline{2-2} 6 & 3 \end{array} \end{array}$$

2.1.4 Divisibilidad. Ejercicios (2.23-2.41)

Un número **natural *c*** es **divisible** por otro ***a*** cuando **la división es exacta**. El cociente es otro número natural y el resto de la división es cero.

a divide a ***c***
a es un divisor de ***c***
c es múltiplo ***a***

Factorización, sean *a, b, c* números naturales si $c = a \cdot b$ se denomina factorización en factores de *c*.

Un ***número primo*** es un número natural mayor que 1, que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1

Un ***número compuesto*** tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo.

Criterios de divisibilidad

Un número es divisible por **2,** *si termina en cero o cifra par.*
Un número es divisible por **3,** *si la suma de sus dígitos nos da múltiplo de 3.*
Un número es divisible por **5,** *si termina en cero o cinco.*

Descomposición en factores primos,
Los números compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.
La descomposición de un número es muy útil pues ayuda a poder calcular el máximo común divisor o mínimo común múltiplo de varios números.

Máximo común divisor. Comunes al menor exponente**.**
El **máximo común divisor** (abreviado ***mcd***) de dos o más números es el mayor número que los divide sin dejar resto.

Ejemplo: el *mcd* de 20 y 10:

20: 1, 2, 4, 5, **10** y 20
10: 1, 2, 5 y **10**

Sean *a* y *b* dos números naturales tales que $a < b$.
Sean *c* y *r* el cociente y el resto de la división de *a* entre *b*.
Se cumple:

$$m.c.d.\ (a,b) = m.c.d.\ (b,r)$$

Dos números naturales *a* y *b* se dicen ***primos entre sí***, si se verifica:

$$m.c.d.\ (a,b) = 1$$

Mínimo común múltiplo. Comunes y no comunes al mayor exponente.
El **mínimo común múltiplo** (***mcm***) de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \\ & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$50 = 2 \cdot 5^2$$
$$mcm(72,50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

Tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, tenemos que:

$$mcm(72,50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

$$a \cdot b = mcm(a,b) \cdot mcd(a,b)$$
$$mcm(a,b) = \frac{a \cdot b}{mcd(a,b)}$$

2.2 NÚMEROS ENTEROS.

2.2.1 Concepto de número entero. Ejercicios (2.42-2.47)

$\mathbb{Z}=\{-\infty,\ldots,0,1,2,3,,\ldots+\infty\}$

El ***opuesto*** de un número entero es el número que hay que añadir para que la suma sea 0.

Valor absoluto.
El **valor absoluto** o **módulo** de un número entero es su valor numérico sin tener en cuenta su *signo*, sea este positivo (+) o negativo (-).

2.2.2 Operaciones con números enteros.

- Suma.
  - Conmutativa. $a+b=b+a$
  - Asociativa. $(a+b)+c=a+(b+c)$

- Resta.

- Multiplicación.
  - Conmutativa. $a\cdot b=b\cdot a$
  - Asociativa. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

- División.

Los signos:
- Iguales +
- Desiguales –

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

2.3 NÚMEROS RACIONALES.

2.3.1 Concepto de número racional.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$$

Fracción

$$\frac{a}{b}\quad \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

Fracciones equivalentes.

$$\frac{a}{b}\ \text{y}\ \frac{c}{d}\qquad a\cdot d=b\cdot c$$

2.3.2 Operaciones fracciones. Ejercicios (2.48-2.54)

Igual denominador

Suma

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Resta

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Distinto denominador

Suma y resta $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$

Producto $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

División $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Fracción inversa, dos fracciones son inversas si su producto es 1.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

2.3.3 Expresión decimal de números racionales. Ejercicios (2.55-2.57)

Forma de representar un número decimal. $\frac{68}{100}=\frac{60}{100}+\frac{8}{100}=\frac{6}{10}+\frac{8}{100}=0,6+0,08=0,68$

Paso expresión fracción a decimal, Utilizamos el algoritmo de la división.

Fracción periódica. Fracción con parte decimal que se repite indefinidamente. El periodo es la parte que se repite.

- Pura: $9,\overset{\frown}{5}$
- Mixta: $9,43\overset{\frown}{5}$

Paso de decimal a fracción. $56,97=\frac{5697}{100}$

Expresión decimal periódica.

$2,\overset{\frown}{051}$

$$\begin{array}{r} x = \quad 2,051... \\ 1000x = 2051,051... \\ \hline 999x = 2049 \end{array} \qquad x=\frac{2049}{999}=\frac{683}{333}$$

Método 2:

$$\frac{2051-2}{999}=\frac{2049}{999}=\frac{683}{333}$$

2.3.4 Porcentajes. Ejercicios (2.58-2.60)

$\frac{a}{b}$ Hallar la expresión decimal fraccionaria y multiplicar por 100. $c\%=\frac{c}{100}$

Porcentaje de variación: $\%variación=\frac{medida\ actual-medida\ anterior}{medida\ anterior}\cdot 100$

El signo de la diferencia: medida actual – medida anterior da el sentido de la variación.

- Si la diferencia es positiva el porcentaje será de ***aumento***.
- Si la diferencia es negativa el porcentaje será de ***disminución***.

2.3.5 Números fraccionarios definidos por expresiones literales.

Por cada *b* individuos u objetos de cierto colectivo, hay *a* que tienen una cualidad, $\frac{b-a}{b}$.

Por cada *a* individuos u objetos de cierto colectivo, hay *b* que no la tienen,

- La fracción del total que cumple la propiedad es $\frac{a}{a+b}$.
- La fracción del total que no la cumple es $\frac{b}{a+b}$.

2.3.6 Ordenación de números racionales.

$\frac{a}{b}$ es mayor que $\frac{c}{d}$ si $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0$, $a\cdot d-b\cdot c>0$.

2.4 NÚMEROS REALES.

2.4.1 Concepto de número real. Ejercicios (2.61-2.65)

$\mathbb{R} = \left\{ \pi, \frac{-1}{3}, 4, -8, 2.71, \sqrt{2} \ldots \right\}$

Número irracional: es un número decimal infinito no periódico. $\sqrt{2}$, π , etc…

2.4.2 Operaciones con números reales.

- Suma.
- Resta.
- Multiplicación.
- División.

2.4.3 Ordenación de números reales.

Sean *a*, *b*, *c* y *d* número reales. Se cumple:

1. Si $a < b$ entonces $\begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$
2. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $\begin{cases} a + c < b + d \\ a - d < b - c \end{cases}$
3. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$
4. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$

2.4.4 Potencias. Ejercicios (2.66-2.72)

Si *a* es un número real y *n* es un número natural no nulo el producto $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . a}_{(n \text{ veces})}$ se representa por a^n y se denomina potencia de base *a* y exponente *n*, o *a* elevado a *n*.
Si $n = 0$ entonces $a^0 = 1$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

2.4.5 Raíces.

Dado un número natural n no nulo y un número real positivo a, siempre existe un número real positivo b tal que $b^n = a$.

Se dice que b es la raíz *n-esima* de a y se escribe $b = \sqrt[n]{a}$ o $b = a^{\frac{1}{n}}$

Potencia con exponente fraccionado.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

2.5 ECUACIONES.

2.5.1 La idea de ecuación. Ejercicios (2.73-2.80)

- **Ecuación**, es toda igualdad que relaciona números con letras. Las letras se denominan incógnitas y son las que debemos hallar.
- **Plantear**, traducir las condiciones literales a símbolos matemáticos.
- **Resolver**, hallar el valor de las incógnitas.

Clasificación:

- Número de incógnitas. Una, dos, etc…
- Mayor exponente, es el que determina el grado.
- Número de ecuaciones.

2.5.2 Soluciones de una ecuación.

- **Ecuaciones de una incógnita.**

  Tenemos que hallar números tales que al reemplazar las incógnitas se cumple la igualdad de los dos miembros.

- **Ecuaciones con más de una incógnita.**

  La solución son tantos números como incógnitas.

- **Sistemas de ecuaciones.**

  La solución del sistema son números que son solución de todas las ecuaciones

2.5.3 Reglas generales para resolver ecuaciones.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
Si *sumamos o restamos* a ambos miembros de una ecuación un mismo número se obtiene una equivalente.
Si *multiplicamos o dividimos* a ambos miembros de una ecuación un mismo número distinto de cero se obtiene una equivalente.
Podemos pasar cualquier término de una ecuación de un miembro a otro sin más que cambiarle el signo.

2.5.4 Ecuaciones lineales con una incógnita.

Si a y b son dos números reales, una ecuación lineal con una incógnita x de la forma $ax = b$ está en **forma normal**.
El número a es el **coeficiente** de la incógnita.
El número b se denomina **término independiente**.

Dada la ecuación $ax = b$, donde a y b son números reales y x es la incógnita se cumple:

- Si $a \neq 0$ la ecuación tiene una única solución $x = \frac{b}{a}$.
- Si $a = 0$ hay dos casos:
  - Si $b = 0$ la ecuación tiene infinitas soluciones ya que $0 \cdot x = 0$.
  - Si $b \neq 0$ no hay solución ya que no se puede cumplir $0 \cdot x = b$.

2.5.5 Sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Método de sustitución.

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.
- Método de eliminación.

TEMA 3 GEOMETRÍA

3.1 GEOMETRÍA ANALÍTICA.

3.1.1 Teorema de Pitágoras.

$h^2 = b^2 + c^2$

3.1.2 Sistemas de referencia y coordenadas. Ejercicios (3.1-3.5)

Un sistema de referencia cartesiano tiene los siguientes elementos:

- Origen.
- Ejes de coordenadas.
- Dos puntos:
  - Eje de abscisas, *x*.
  - Eje de ordenadas, *y*.

Distancia entre dos puntos (x, y) y (x', y'). $h = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$

3.2 RECTAS EN EL PLANO.

Una recta es el conjunto de todos los puntos que satisface la siguiente ecuación: Ejercicios (3.6-3.17)

Ecuación General de la Recta $Ax + By + C = 0$

- Recta paralela al eje de ordenadas. Si $B = 0$ tenemos que $x = -\dfrac{C}{A}$.
- Recta paralela al eje de abscisas. Si $A = 0$ tenemos que $y = -\dfrac{C}{B}$.

Ecuación explicita de la recta: $y = ax + b$

- Pendiente: *a*, indica la inclinación.
- Ordenada en el origen: *b*, nivel de la recta donde corta al eje de ordenadas.

3.2.1 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Ejercicios (3.18-3.22)

Si dos puntos tienen abscisas distintas $x_1 \neq x_2$ la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es: $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

Si dos puntos tienen abscisas iguales $x_1 = x_2$ la ecuación es $x = x_1$

3.2.2 Condición de alineación de tres puntos. Ejercicios (3.23-3.26)

Tres puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) están alineados si $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o bien $x_1 = x_2 = x_3$.

3.2.3 Posición relativa de dos rectas. Ejercicios (3.27-3.34)

El **punto de intersección** de dos rectas es la solución del sistema de ecuaciones.

Rectas paralelas. Las rectas de ecuaciones:

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

Son paralelas si $a = a'$

La ecuación de la recta ***paralela a la recta*** $y = ax + b$ ***por el punto*** (x_0, y_0) es $y = a(x - x_0) + y_0$.
En el caso de una recta vertical $x = k$, la paralela por (x_0, y_0) es la vertical $x = x_0$.

Rectas perpendiculares. Ejercicios (3.35-3.45)
La ecuación de la perpendicular a la recta $y = ax + b$ por el punto (x_0, y_0) es $y = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0$
Si $a = 0$ la recta es paralela al eje de abscisas y su perpendicular por el punto (x_0, y_0) es la paralela al eje de ordenadas $x = x_0$.
Simétricamente la perpendicular a la recta vertical $x = k$ por (x_0, y_0) es la paralela al eje de abscisas $y = y_0$.

3.3 FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS.

3.3.1 Polígonos. Ejercicios (3.46-3.54)

- Perímetro, es la longitud total de su contorno.
- Área de un rectángulo. Es el producto de sus lados, $A = a \cdot b$.
- Área de un paralelogramo. Es el producto de su base por su altura. $A = b \cdot h$
- Área de un triángulo. Es la mitad del producto de su base por su altura. $A = \frac{b \cdot h}{2}$

3.3.2 La circunferencia. Ejercicios (3.55-3.66)

Ecuación de la circunferencia: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
Centro y radio de una circunferencia:
La ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa una circunferencia con:

- Centro: $c: \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.
- Radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$.

Círculo: dada la circunferencia de centro (x_0, y_0) su círculo es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$.

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$.
Área del círculo: $A = \pi r^2$.
La circunferencia es el borde y el círculo es el interior.

TEMA 4 ANÁLISIS

4.1 FUNCIONES.

4.1.1 Concepto de función. Ejercicios (4.1 - 4.3)

Una ***función*** es una relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la ***variable independiente x***, le asocia un único valor de la ***variable dependiente y***, que llamaremos ***imagen*** de ***x***. Decimos que ***y*** es ***función*** de ***x*** y lo representamos por $y = f\left(x\right)$

Una función es una aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Una ***aplicación*** entre dos conjuntos A y B es una transformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.

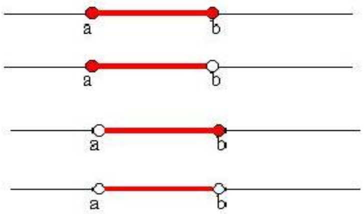
Rango de variación de una magnitud numérica.

Intervalo cerrado [a,b] al conjunto de los números reales *x*, **a≤ x ≤ b.**

Intervalo semiabierto [a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a ≤ x < b.**

Intervalo semiabierto (a,b] al conjunto de los números reales *x*, **a < x ≤ b.**

Intervalo abierto (a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a < x < b.**



$\frac{0}{2} = 0$; $\frac{3}{0} = \infty$; $\frac{4}{\infty} = 0$.

4.1.2 Representación gráfica de una función. Ejercicios (4.4 - 4.10)

La gráfica de una determinada función *f*, definida en un intervalo *I*, es el conjunto de puntos del plano cuya abscisa es un valor $x \in I$ y ordenada $f\left(x\right)$.

4.1.3 Características de las funciones. Ejercicios (4.11 - 4.15)

Función creciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f\left(x\right)$.

Función decreciente, cuando **x** aumenta dentro de un intervalo entonces $f\left(x\right)$ disminuye.

Máximos y mínimos relativos, la derivada en un máximo o mínimo local o relativo vale 0, siendo condición necesaria del máximo o mínimo, si bien esta condición es necesaria no es suficiente, no obstante nos limita los posibles máximos o mínimos. Estos se encontrarán entre los valores que anulan la derivada. $f'\left(x\right) = 0$.

Asíntotas verticales, las asíntotas verticales se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.
Asíntotas horizontales, hay asíntota horizontal en las funciones racionales cuando el numerador tiene grado menor o igual al denominador. $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right)$

Asíntotas oblicuas, se presentan cuando el grado del numerador excede en una unidad del grado del denominador, son incompatibles con las asíntotas horizontales.
Son rectas del tipo $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

4.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD.

4.2.1 Límite de una función en un punto. Ejercicios (4.16 - 4.19)

El ***límite*** describe cómo se comporta una función cuando se aproxima a un determinado valor.

Un límite existe si el valor de los límites laterales en un punto es el mismo. El límite de una función en un punto si existe, es único.

Límites elementales.

- Si $f(x)=c$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)=c$.
- Si $f(x)=x$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0$.
- Si $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)=a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1 x_0 + a_0$.
- Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)\to \lim_{x\to x_0} f(x)$ No existe el límite.

Estas reglas son válidas siempre que el resultado esté bien determinado, existen unos casos donde la función resulta indeterminada:

$\infty-\infty;\quad 0\cdot\infty;\quad \dfrac{0}{0};\quad \dfrac{\infty}{\infty};$

La ***regla de l'Hôpital*** se aplica para salvar indeterminaciones que resultan de reemplazar el valor numérico del límite en la función dada. La regla dice que, se deriva el numerador y el denominador, ***por separado***; es decir: sean las funciones originales $f(x)/g(x)$, al aplicar la regla se obtendrá: $f'(x)/g'(x)$. Lo podemos aplicar en indeterminaciones del tipo 0/0 y ∞/∞.

4.2.2 Funciones continuas. Ejercicios (4.20 - 4.24)

La función $f(x)$ tiene que estar definida.

El valor de los límites laterales tiene que ser el mismo.

Una función f es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Una ***discontinuidad evitable*** en un punto $x=a$ es aquella en que los límites laterales coinciden, pero el valor de la función en el punto no, es decir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+}=L$$
$$f(a)\neq L$$

Es razonable que llamen ***discontinuidad evitable*** a este tipo de discontinuidades ya que la función en el punto de discontinuidad parece que sea continua, pero el punto en concreto no existe, así que sólo añadiendo ese punto, lograríamos que la función fuera continua.

Ejercicio 4.23.

4.3 CÁLCULO DIFERENCIAL.

4.3.1 Concepto de derivada. Ejercicios (4.25 - 4.31)

Si f es una función definida en un intervalo I y $x_0 \in I$, la derivada de f en x_0 es $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, suponiendo que el límite exista.

Una función f se denomina **derivable** en el punto x_0 si la derivada $f'(x_0)$ existe y es finita.

Toda función derivable en un punto x_0 es continua en x_0.

La derivada es el resultado de un límite y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

4.3.2 Tangente a una curva. Ejercicios (4.32 - 4.47)

La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $\left(x_0 \left(f(x_0)\right)\right)$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ y además pasa por el punto $\left(x_0 \left(f(x_0)\right)\right)$.

4.3.3 Cálculo de derivadas. Ejercicios (4.26 - 4.31)

Suma	$(f+g)' = f' + g'$
Producto	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Función constante	$f'(x) = 0$ si $f(x) = c$
Función identidad	$f'(x) = 1$ si $f(x) = x$
Potencia de f	$(f^c)' = c \cdot f^{c-1} f'$
Función compuesta	$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4.3.4 Aplicaciones de las derivadas. **Ejercicios (4.48)**

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' \leq 0$.

Si *f* es una función derivable en x_0 y tiene en x_0 un máximo o mínimo relativo tiene que ser $f'(x_0) = 0$. Para una función *f* derivable en todos los puntos de un intervalo (a,b), la resolución de la ecuación $f'(x_0) = 0$ con $x \in (a,b)$ proporciona todas las abscisas candidatas a ser máximos o mínimos relativos de *f* en (a,b).

Derivada segunda de una función. Ejercicios (4.49 - 4.50)
Sea *f* derivable en todos los puntos de un intervalo alrededor de x_0 y f' la función derivada de *f*. La derivada de f' en x_0, si existe, se denomina derivada segunda de *f* y se representa por f''

Si *f* tiene derivada f' que es derivable en x_0, se cumple $f'(x_0) = 0$ y:

- $f''(x_0) > 0$, entonces *f* tiene un mínimo relativo en x_0.
- $f''(x_0) < 0$, entonces *f* tiene un máximo relativo en x_0.

La función se denomina: **Ejercicios (4.51 - 4.55)**
- **Convexa** en aquellos intervalos en que la pendiente de la tangente, $f'(x)$ crece.
- **Cóncava** cuando la pendiente de la tangente $f'(x)$ decrece.

Los puntos en los que pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa se llaman **puntos de inflexión**.

TEMA 5 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

5.1 AZAR Y PROBABILIDAD.

5.1.1 Azar y necesidad. Ejercicios (5.1 - 5.7)

Un **fenómeno aleatorio** es aquel que bajo el mismo conjunto aparente de condiciones iniciales, puede presentar resultados diferentes, es decir, no se puede predecir el resultado exacto de cada experiencia particular.

5.1.2 Certeza y probabilidad.

La **probabilidad** de un acontecimiento posible es un número entre 0 y 1.

5.2 MODELO MATEMÁTICO DE LOS FENÓMENOS ALEATORIOS.

Un **suceso** es un fenómeno aleatorio que podemos decir si ha ocurrido o no.

5.2.1 Modelo matemático de los sucesos.

Un **espacio de posibilidades** es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio y se designa por Ω.

Los sucesos relativos a un fenómeno aleatorio se identifican con los subconjuntos de su espacio de posibilidades.

- Los subconjuntos con un único elemento se denominan sucesos simples.
- Los subconjuntos que tienen varios elementos se denominan sucesos compuestos y son agregados de sucesos simples.

El espacio de posibilidades es un suceso compuesto que contiene como elementos a todos los resultados posibles del experimento y recibe el nombre de **suceso seguro**.

El subconjunto vacío $\varnothing$ representa el suceso imposible. No es simple ni compuesto.

5.2.2 Operaciones con sucesos. Ejercicios (5.8 - 5.11)

Inclusión	$A \subset B$	Siempre que ocurre A ocurre B.
Intersección	$A \cap B$	Ocurre siempre que el resultado pertenezca a A y B
Unión	$A \cup B$	Ocurre siempre que el resultado pertenezca a A o B o los dos.
Complementación	A^C	Sucede siempre cuando el resultado no pertenece a A.

5.2.3 Modelo matemático de la probabilidad.

Una probabilidad sobre un espacio de posibilidades Ω es una función que a cada subconjunto A de Ω le asocia un número *P(A)*, esta función cumple las cuatro condiciones siguientes:

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Si A es un suceso, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

5.2.4 Asignación de probabilidades en un espacio finito. Ejercicios (5.12 - 5.13)

Para definir una probabilidad en un espacio que tenga un número finito de resultados posibles:

- Asignamos una probabilidad a cada suceso simple.
- Deben ser entre 0 y 1.
- La suma tiene que ser 1.

La probabilidad de los restantes sucesos se calculan sumando las probabilidades de los sucesos simples que los componen.

5.2.5 Asignación de probabilidad en los modelos uniformes finitos. Ejercicios (5.14 - 5.23)

Regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

5.3 PROBABILIDADES CONDICIONADAS Ejercicios (5.24 - 5.33)

La probabilidad de que ocurra el suceso B cuando sabemos que A ha ocurrido se denomina **probabilidad de B condicionada por A** y se designa por el símbolo $P(B|A)$.
La probabilidad condicionada reduce el espacio de posibilidades con la información adicional que nos proporciona y mejora la probabilidad que se obtiene.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

5.3.1 Cálculo con probabilidades condicionadas.

Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es igual a la probabilidad de que ocurra primero A, por la probabilidad de que ocurra B si ya ha ocurrido A.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

5.3.2 Fórmula de la probabilidad total. Ejercicios (5.34 - 5.37)

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + ... + P(B_n)\cdot P(A|B_n)$$

5.3.3 Regla de Bayes. Ejercicios (5.38 - 5.41)

Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que A haya ocurrido, suponiendo que B ha ocurrido, se puede calcular mediante la regla de Bayes.

$$P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}$$

5.3.4 Independencia de sucesos. Ejercicios (5.42 - 5.46)

En un fenómeno aleatorio determinado diremos que el suceso B es independiente del suceso A si se cumple $P(B|A) = P(B)$

Dos sucesos A y B son independientes si se cumple $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

En la probabilidad condicionada un suceso A modifica la probabilidad de que ocurra otro B, pero no siempre la probabilidad condicionada es distinta de la inicial, en este caso un suceso es independiente del otro.

5.3.5 Series independientes de fenómenos aleatorios.

La probabilidad de que ocurran simultáneamente todos estos sucesos es igual al producto de sus probabilidades.

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

5.4 VARIABLES DE LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

5.4.1 Conceptos básicos en estadística. Ejercicios (5.47 - 5.63)

Población, conjunto de seres u objetos acerca de los que se desea obtener información.

Individuo, cada uno de los elementos de los miembros de la población.

La **estadística** es la ciencia que estudia mediante métodos cuantitativos, características de las poblaciones obtenidas como síntesis de la observación de unidades estadísticas.

Censo, consiste en anotar determinadas características de todos los individuos de una población.

La **estadística descriptiva** es la parte de la estadística que estudia las ideas, métodos y técnicas para la descripción gráfica y numérica de los conjuntos numerosos.

Muestra, subconjunto de individuos que son observados para obtener información sobre el total de la población a que pertenecen.

Inferencia estadística, parte de la estadística que estudia los métodos para establecer conclusiones sobre una población a partir de una muestra de la misma.

5.4.2 Variables y observaciones.

Los atributos o magnitudes que se observan en los individuos de la población se denominan variables estadísticas.

- De los atributos presentan **modalidades**.
- De las magnitudes toman **valores**.

El conjunto de modalidades o valores de cada variable medidos en un individuo constituye una observación.

5.4.3 Clasificación de las variables.

Variable Cualitativa mide atributos y sus modalidades no son numéricas sino simples etiquetas.

Variable Cuantitativa cuando los valores que toma son numéricos.

- **Discretas**, si toman valores discretos como 0, 1, 2,…
- **Continuas**, si es razonable suponer que puede tomar cualquier valor intermedio.

Variables nominales son las que representan atributos cuyas modalidades no pueden ser ordenadas ni operadas conforme a las reglas aritméticas.

Variables ordinales son las que tienen modalidades que pueden ser ordenadas de mayor a menor.

Variables medidas **en escala de intervalos** son las que valoran alguna cualidad cuantificable de los individuos en la que el 0 de la escala de medida tiene un carácter relativo.

Variables medidas **en escala de razón** son las que valoran una cualidad de modo que el 0 tiene un sentido absoluto. Tomar el valor 0 significa ausencia absoluta de la cualidad.

5.4.4 Distribución de frecuencias de una variable.

La **frecuencia absoluta** de una modalidad o valor de la variable es el número de observaciones que presentan esa modalidad o valor.

La **suma de frecuencias absolutas** $F_1 + F_2 + ... + F_k = N$

La **frecuencia relativa** de la modalidad o valor x_i es la proporción de observaciones que presentan el valor x_i, se representa por $f_i = \dfrac{F_i}{N}$.

La **suma de las frecuencias relativas** de todas las modalidades o valores es igual a 1.

El **porcentaje** de una modalidad o valor x_i es igual a multiplicar por 100 su frecuencia relativa, se representa por $p_i = 100 \cdot f_i$.
La **frecuencia absoluta acumulada** del valor x_j es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o igual que x_j, se representa por $N_j = F_1 + F_2 + ...F_j$.

La **frecuencia relativa acumulada** del valor x_j es la suma de las frecuencias relativas de todos los valores menores o igual que x_j, se representa por $n_j = f_1 + f_2 + ...f_j$.

5.5 DESCRIPCIÓN GRÁFICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

5.5.1 Variables cualitativas.

Diagramas de sectores.
Diagramas de barras.
Pictogramas.

5.5.1 Variables cuantitativas.

Histogramas.

5.6 DESCRIPCIÓN NUMÉRICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

5.6.1 Medidas de centralización. Ejercicios (5.64 - 5.70)

La **media aritmética** es igual a la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

La **media aritmética** de una distribución de frecuencias absolutas.

$$\overline{x} = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + \ldots + x_nF_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iF_i}{N}$$

La **media aritmética** de una distribución de frecuencias relativas.

$$\overline{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

5.6.2 Medidas de dispersión.

El **rango o recorrido** de una variable es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la variable, se representa por: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

La **varianza** es la media aritmética de los cuadrados de sus desviaciones respecto de la media, se representa por: $s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza, se reprenda por:

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

Varianza de una distribución de frecuencias absolutas:

$$s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2F_1+(x_2-\overline{x})^2F_2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2F_n}{F_1+F_2+\ldots+F_n}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2F_i$$

Varianza de una distribución de frecuencias relativas:

$$s^2=(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2f_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2f_i$$

La **varianza** es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media, se representa por: $s^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$

Coeficiente de variación al cociente entre la desviación típica y la media, suele expresarse en forma de porcentaje. $CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}$