Matemáticas Febrero 2013 Modelo A

1. Calcular el rango de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) 1
b) 2
c) 3

2. ¿Cuál es el cociente de dividir $P(x) = x^4 - x^2 + 9$ entre $Q(x) = x + 2$?

a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$.
b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$.
c) $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$.

3. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es cierta en un triángulo rectángulo:

a) La longitud de la hipotenusa es mayor que la suma de los catetos.
b) La longitud de la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
c) El ángulo opuesto a la hipotenusa es menos que π/5 radianes.

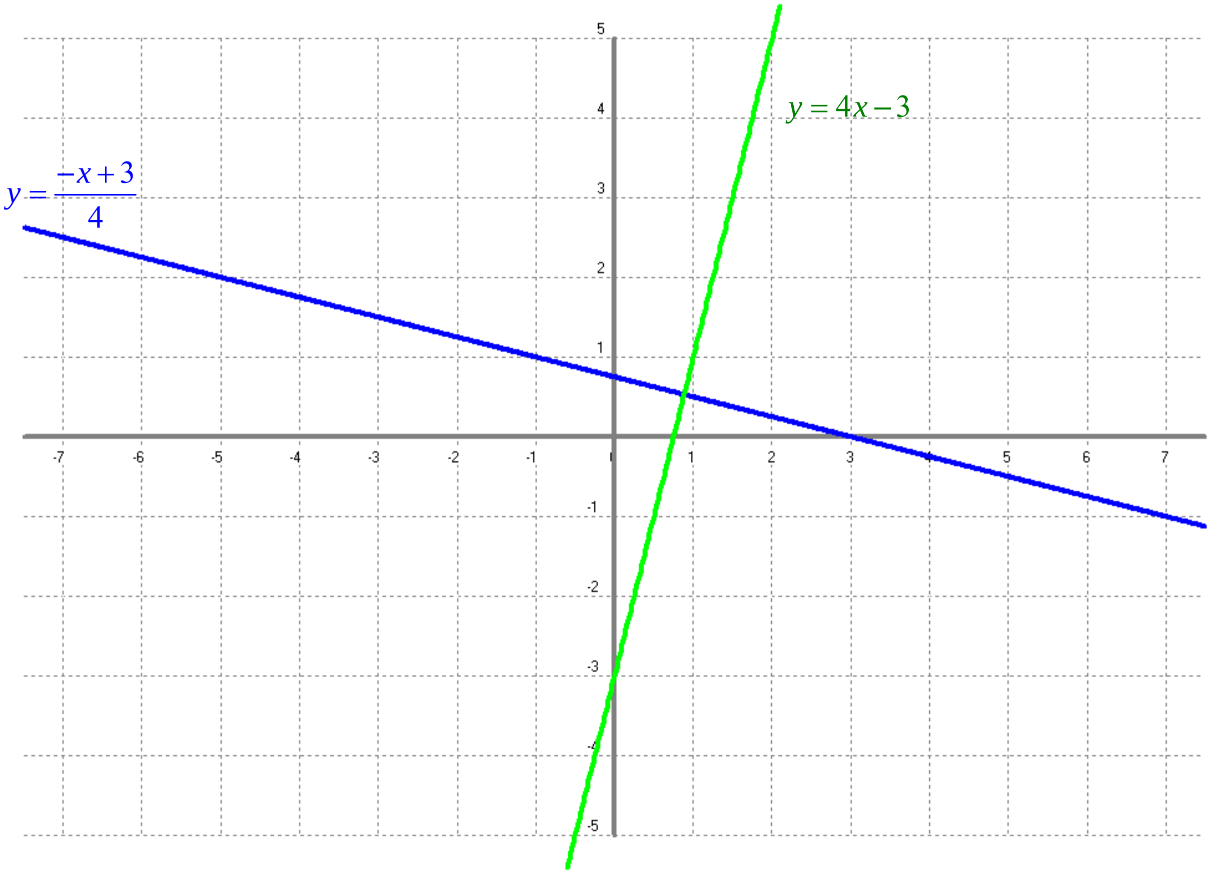
4. Hallar la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A = (1,1) y es perpendicular a $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - t \end{cases}$

a) $3x - y = 2$.
b) $x + 4y = 5$.
c) $4x - y = 3$.

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - t \end{cases}; \quad \begin{cases} t = \dfrac{x+1}{4} \\ t = y - 1 \end{cases}; \quad \frac{x+1}{4} = y - 1; \quad x + 1 = (y-1)\cdot 4; \quad y = \frac{-x+3}{4}$$

La ecuación de la perpendicular a la recta $y = ax + b$ por el punto (x_0, y_0) es $y = -\dfrac{1}{a}(x - x_0) + y_0$

$$y = 4(x-1) + 1; \qquad y = 4x - 3; \qquad 4x - y = 3$$



5. ¿Cuál es la posición relativa de estas dos rectas?

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1-t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-2p \\ y=-3p \\ z=p \end{cases}$$

a) Se cortan. Están en el mismo plano, Secantes.
b) Son paralelas.
c) Se cruzan. Están en distintos plano.

Si $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & v_1 & w_1 \\ y_2-y_1 & v_2 & w_2 \\ z_2-z_1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$, en tonces Se cruzan. Están en distintos plano.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2+3-4+3+1=-2 \neq 0$$

6. ¿Para qué valor de α el sistema $\begin{cases} 3x - y + \alpha z = \alpha \\ 5x + y + 2z = 2 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$ es compatible indeterminado?

a) α = 1.
b) α = 2/3.
c) α = 2.

$$\begin{cases} 3-1+\alpha=\alpha \\ 5+1+2=2 \\ 0+3+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 15-5+5\alpha=5\alpha \\ 15+3+6=6 \\ 0+3+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 15-5+5\alpha=5\alpha \\ 0+8+(6-5\alpha)=(6-5\alpha) \\ 0+3+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 15-5+5\alpha=5\alpha \\ 0+24+(18-15\alpha)=(18-15\alpha) \\ 0+24+8=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15-5+5\alpha=5\alpha \\ 0+24+(18-15\alpha)=(18-15\alpha) \\ 0+0-(10+15\alpha)=(10+15\alpha) \end{cases}$$

El sistema es ***compatible indeterminado*** para $\alpha = \frac{2}{3}$.

Matemáticas Junio 2013 Modelo A

1. Calcule el valor de α para que el polinomio $P(x) = \alpha x^4 - 2x^3 + 1$ verifique $P(-1) = 0$.

a) $\alpha = -3$.
b) $\alpha = 0$.
c) $\alpha = 1$.

$P(-1) = \alpha(-1)^4 - 2(-1)^3 + 1 = -3$

2. ¿Cuánto es $\pi/5$ radianes en grados?

a) 18 grados.
b) 72 grados.
c) 36 grados.

3. Calcular $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
b) No se pueden multiplicar ambas matrices.
c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. ¿Tiene alguna solución el siguiente sistema? $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - y = -4 \\ -x + 2y = 9 \end{cases}$

a) No tiene ninguna solución.
b) Tiene una única solución.
c) Tiene infinitas soluciones.

5. ¿Para cuantos valores de α el módulo del vector $\boldsymbol{v} = (\alpha, \alpha, -1)$ es igual a 1?

a) Ningún valor.
b) Un único valor.
c) Más de un valor.

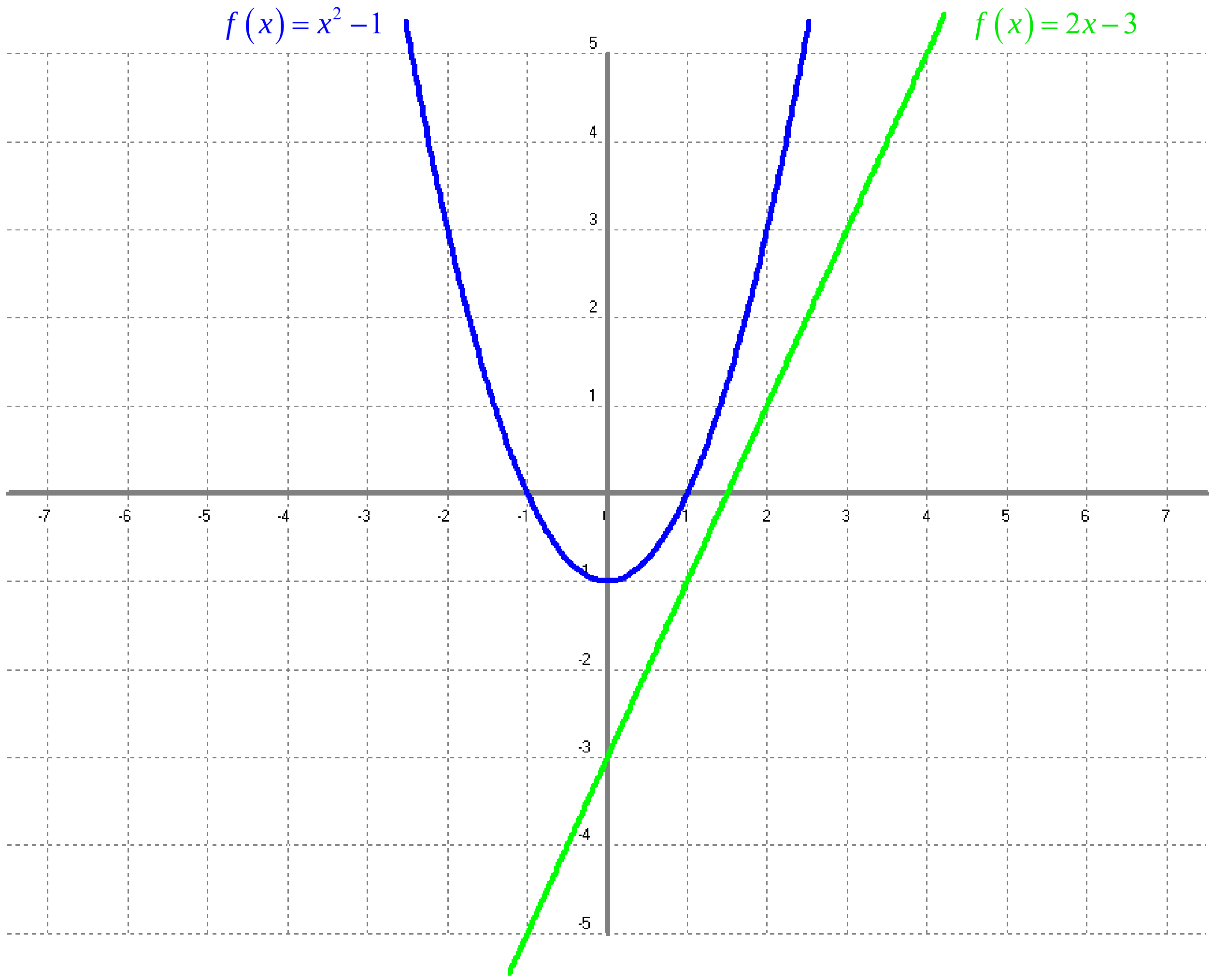
6. La función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \ si \ x\le 1 \\ 2x-3 \ si \ x>1 \end{cases}$ verifica que:

a) Es discontinua en $\boldsymbol{x}=1$.
b) No está definida en $\boldsymbol{x}=0$.
c) Es continua en $\boldsymbol{x}=1$.

Hay que estudiar los límites laterales en $\boldsymbol{x}=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2-1=0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x-3=-1$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto es discontinua en $\boldsymbol{x}=1$.



7. La función $f(x) = x^3 - 3x - 3$ tiene en el punto $(-1,-1)$:

a) Un máximo.
b) Un punto de inflexión.
c) Un mínimo.

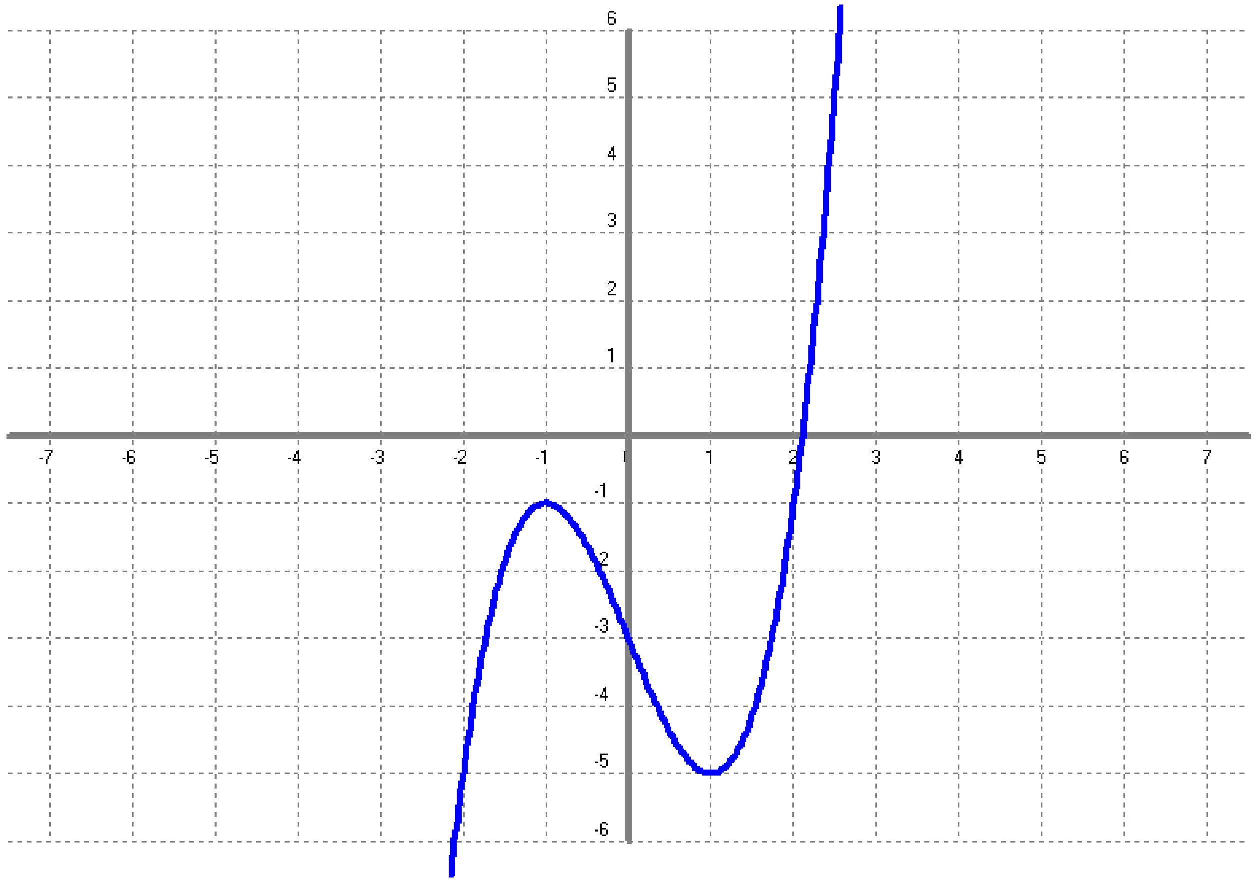
La derivada de $f(x) = x^3 - 3x - 3$ es: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$; $x = \pm 1$; En 1 y en -1 tenemos un posible máximo o mínimo.

La derivada segunda es $f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0$, hay un mínimo.

$f''(-1) = -6 < 0$, hay un máximo.

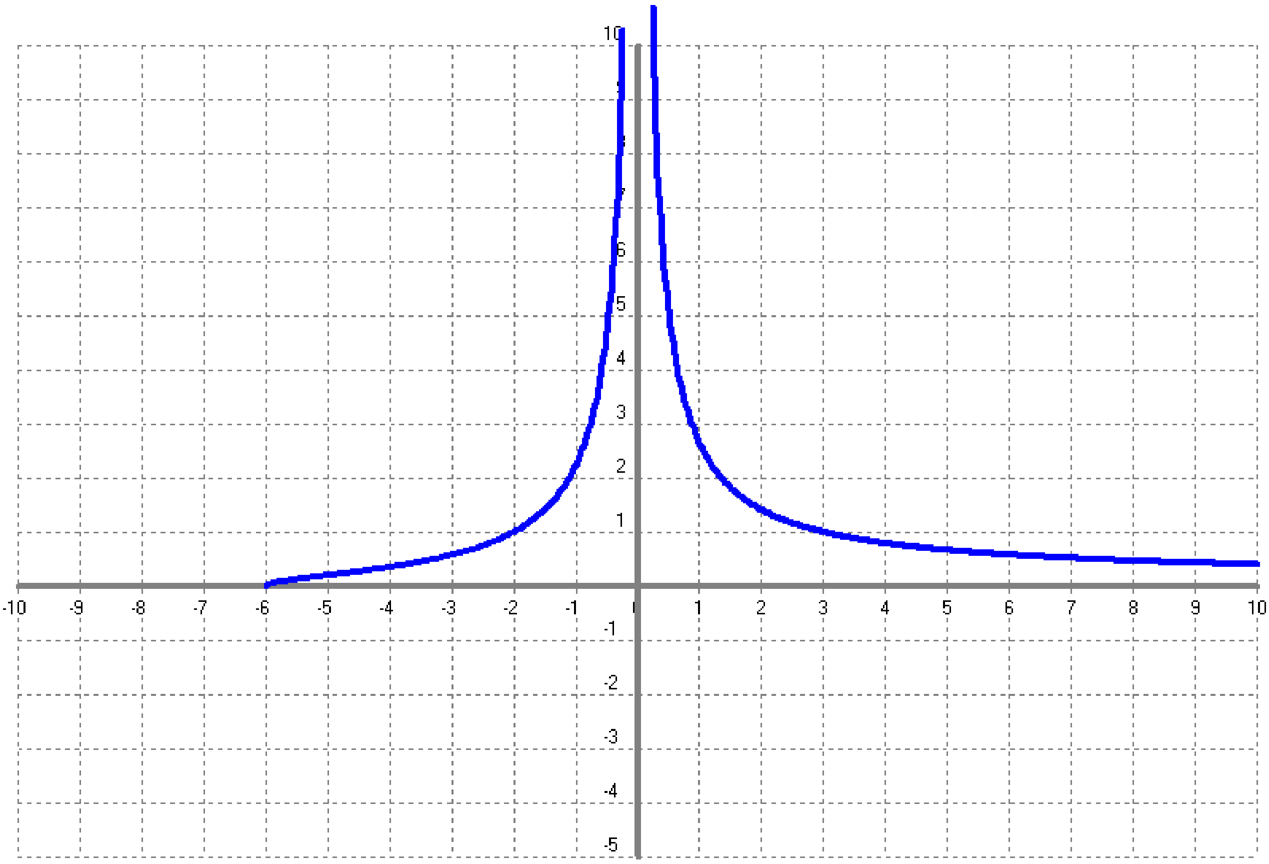


8. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+6}{x^2}}$ es:

a) $\mathbb{R}-\{-6,0\}$.

b) $[-6,0)\cup(0,+\infty)$.

c) $(-\infty,-6]\cup(0,+\infty)$.

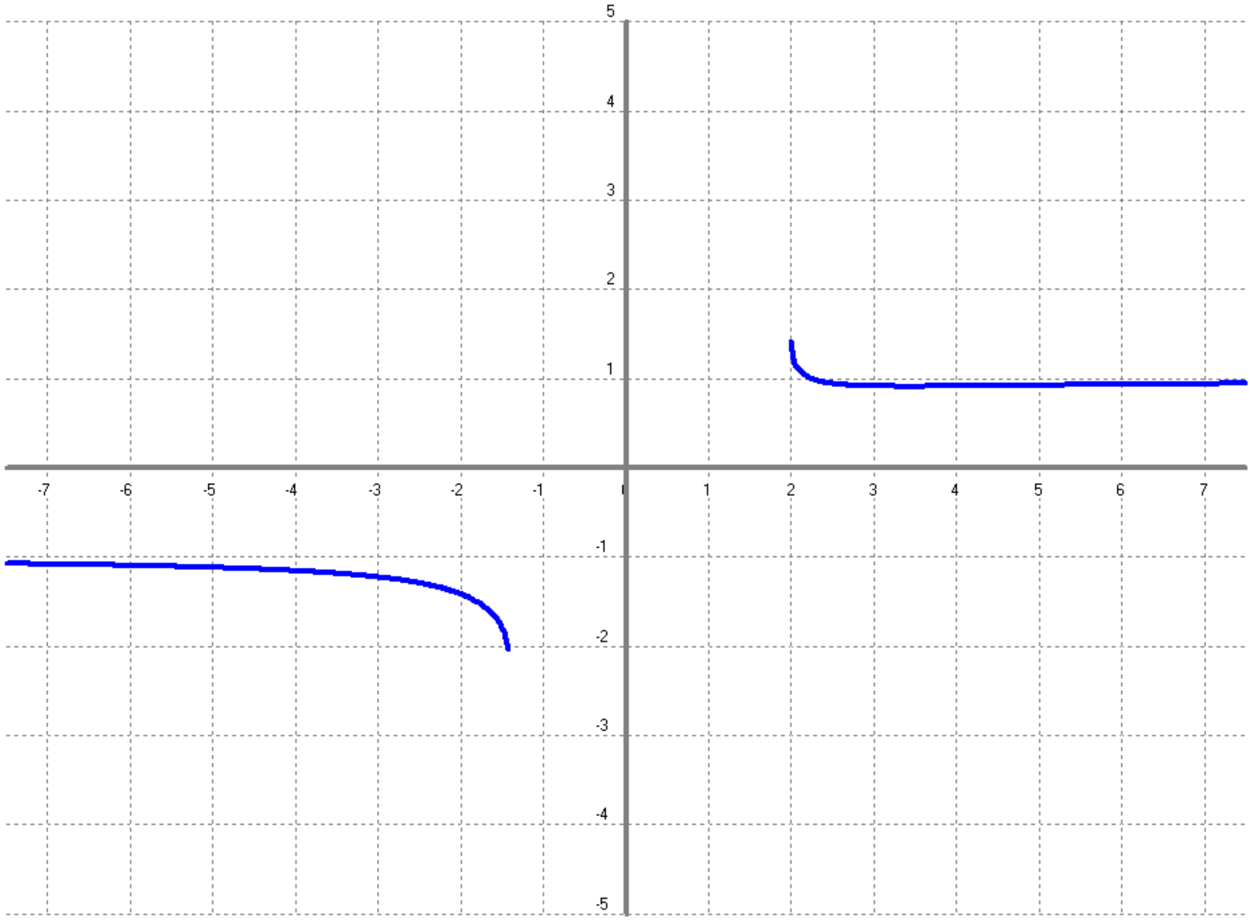


9. El valor del $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$ es

a) 1.
b) 0.
c) ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x^2+2x}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{2}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+1}=1$$



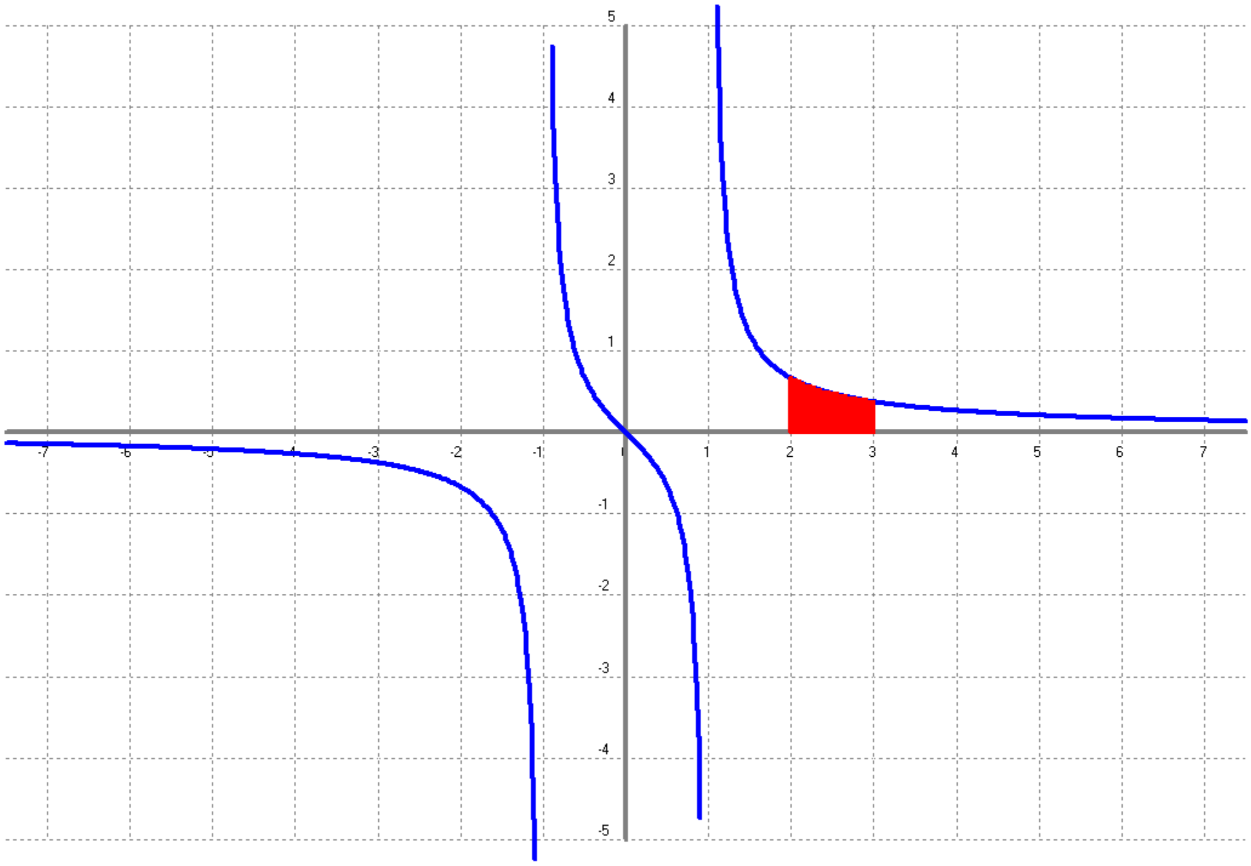
10. El valor de $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

a) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

b) $\ln\frac{9}{4}$

c) $arctg\,\frac{8}{3}$

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\left(3^2-1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(2^2-1\right) = \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$



Integral definida entre 2 i 3 = 0,490435

Matemáticas Junio 2013 Modelo E

1. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ entre $Q(x) = x^2 + 1$?

a) $2 - 2x$.
b) -2.
c) $-2x$.

2. La igualdad $sen(\pi - \alpha) = -sen(\alpha)$ es:

a) Cierta para cualquier valor de α.
b) Es cierta para algunos valores de α y es falso para otros valores de α.
c) Es falsa para cualquier valor de α.

3. ¿Cuánto debe valer α para que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$?

a) $\alpha = 0$.
b) $\alpha = 1$.
c) Para ningún valor de α.

4. ¿Para qué valor de α el sistema tiene única solución en la que $x = 2$? $\begin{cases} 2x + \alpha y = \alpha \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) $\alpha = 0$.
b) $\alpha = 2$.
c) $\alpha = 4$.

5. ¿Cuál es el producto vectorial de $\boldsymbol{v} = (2,-1,5)$ y $\boldsymbol{w} = (1,-8,7)$?

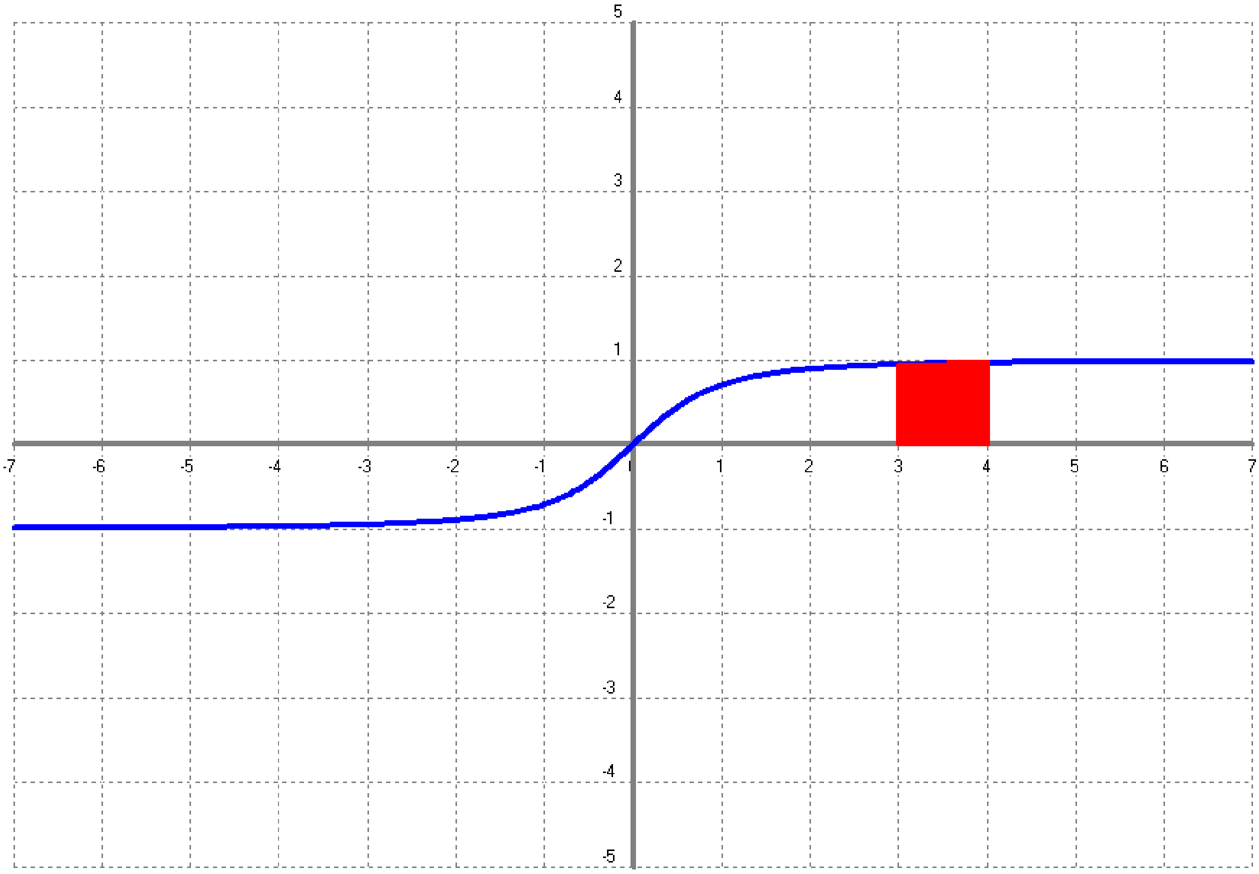
a) $(-47,-9,17)$.
b) $(33,-9,15)$.
c) $(47,-9,-17)$.

6. El valor de $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

a) $\ln\sqrt{\frac{17}{10}}$.

b) $\sqrt{17}-\sqrt{10}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

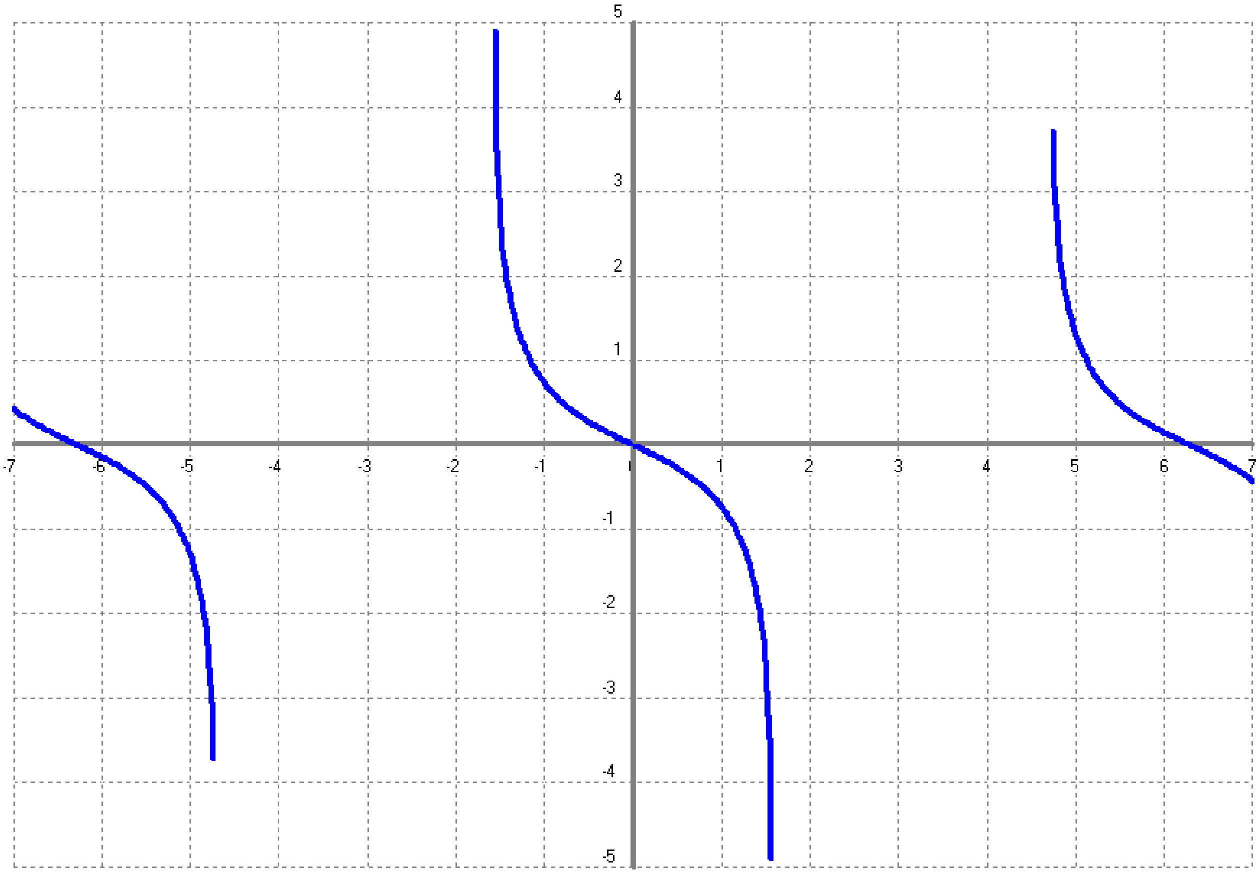


Integral definida entre 3 i 4,01333 = 0,964275

$$\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_3^4 2x\cdot\left(x^2+1\right)^{-1/2}dx = \left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_3^4 = \sqrt{17}-\sqrt{10}$$

7. El valor del $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(cos\ x)}{sen\ x}$ es:

a) ∞.
b) 1.
c) 0.



$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(cos\ x)}{sen\ x}$, resulta una indeterminación. Aplicamos L´hopital $\dfrac{-(tg\ x)}{-cos\ x}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-(tg\ x)}{-cos\ x} = \frac{0}{-1} = 0$$

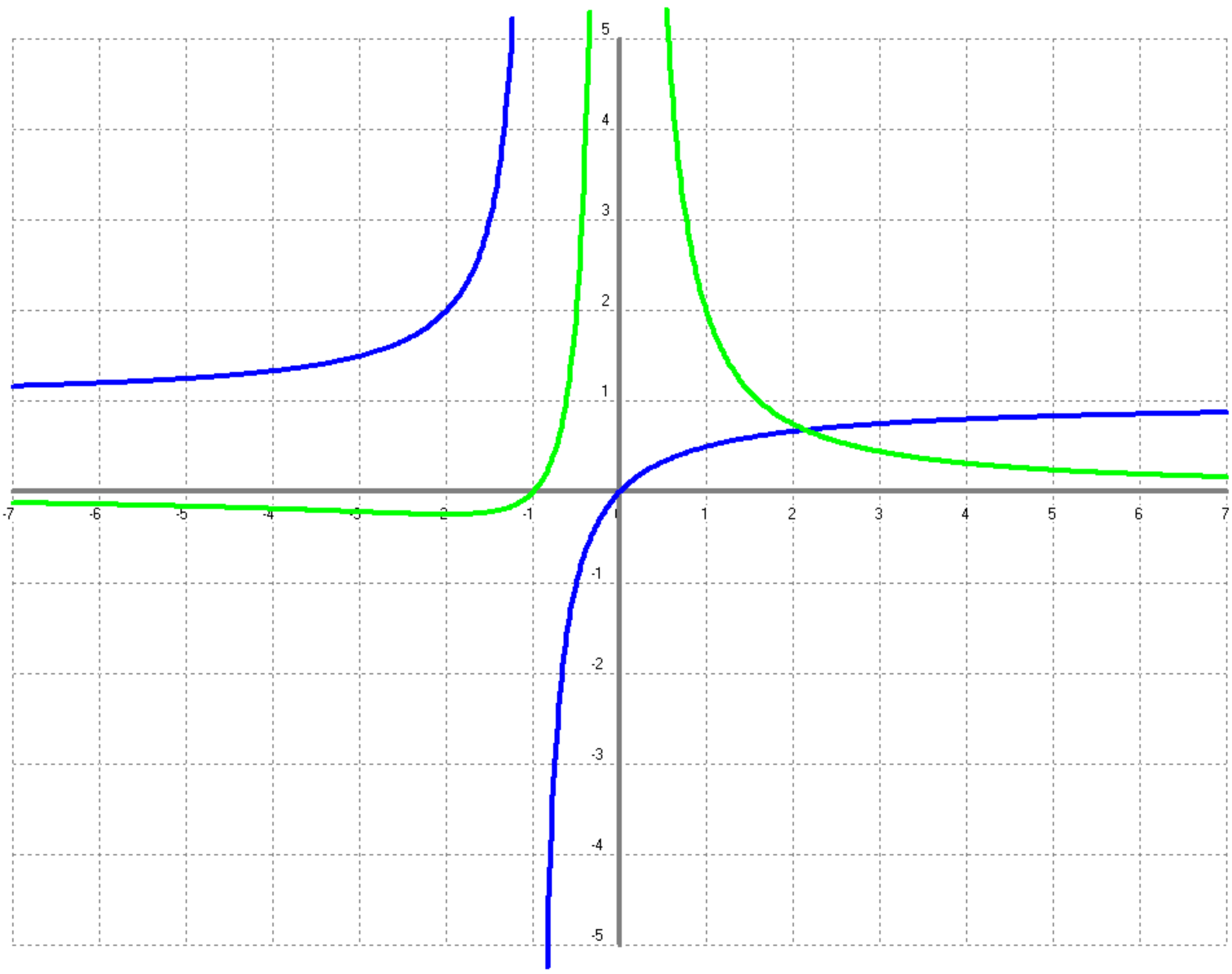
8. La función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & si\ x\le -2 \\ \dfrac{x+1}{x^2} & si\ x>-2 \end{cases}$ verifica que:

a) Para el valor $x=-2$ es discontinua.
b) En $x=-2$ no está definida.
c) Es continua en $x=-2$.

Hay que estudiar los límites laterales en $x=-2$.

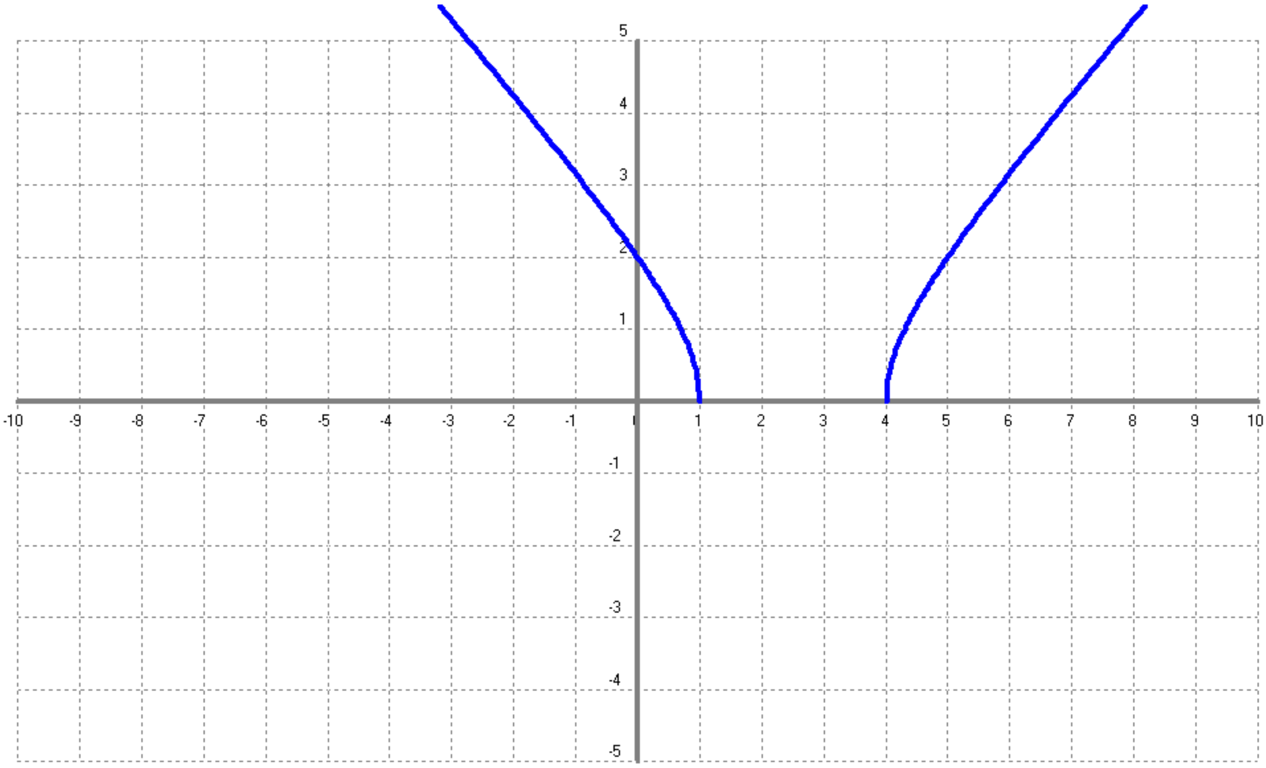
$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x}{x+1}=\frac{-2}{-1}=2$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x+1}{x^2}=\frac{-1}{4}$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto es discontinua en $x=-2$.



9. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ es:

a) $\mathbb{R}-\{1,4\}$
b) $(-\infty,1] \cup [4,+\infty)$.
c) $(-\infty,1) \cup (4,+\infty)$.



El dominio de definición de una función es el conjunto de elementos que tiene imagen.

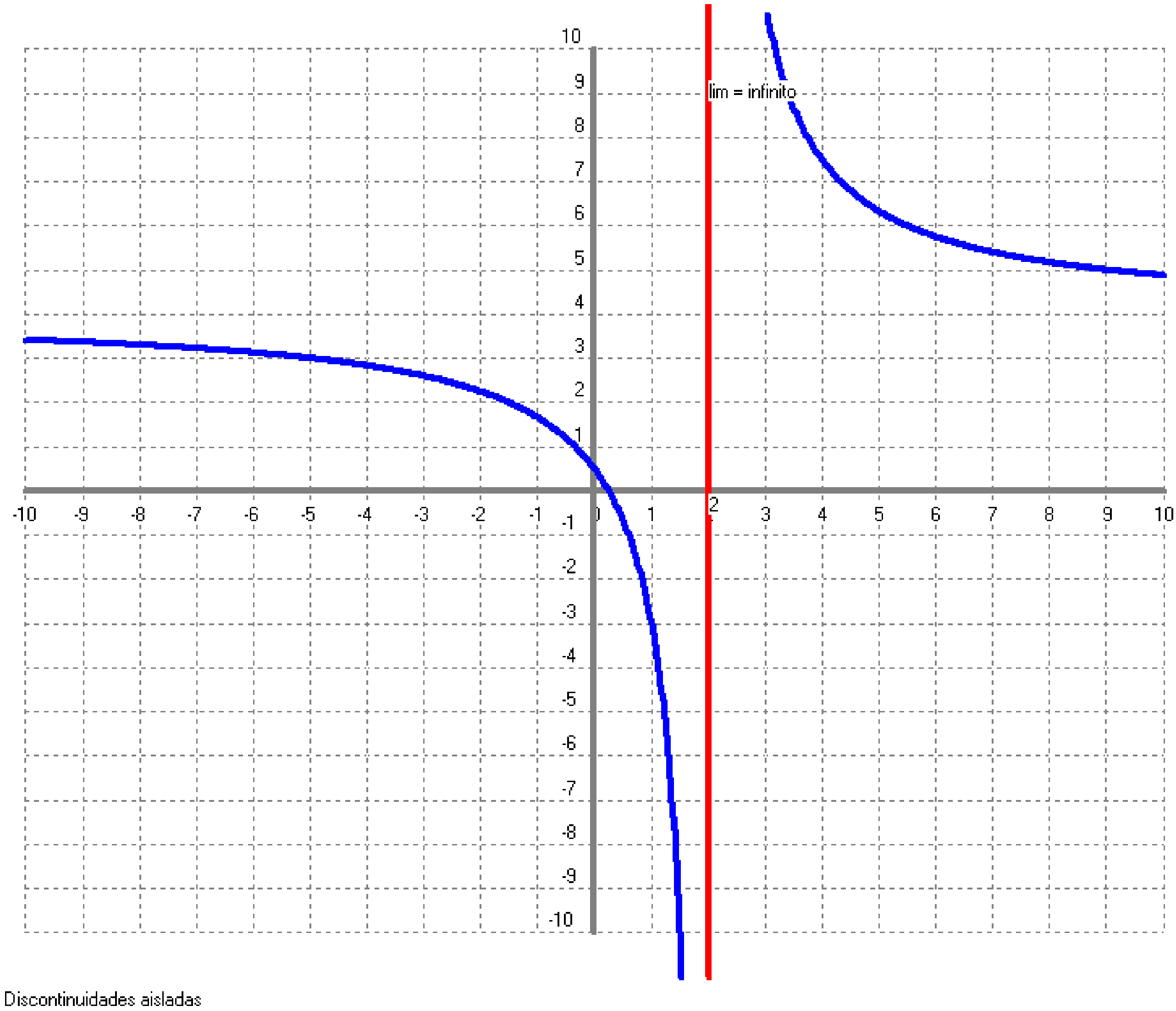
La expresión $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ define una función $f: I \to R$, en $(-\infty,1] \cup [4,+\infty)$ porque en el dominio de definición de una raíz la expresión que está dentro de la raíz tiene que ser mayor o igual que 0, *en el caso que sea negativa no tiene imagen*. Por lo tanto tenemos:

x^2-5x+4

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases}$$

10. La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-2}$, tiene la asíntota vertical.

a) $y=4$.
b) $y=2$.
c) $x=2$.



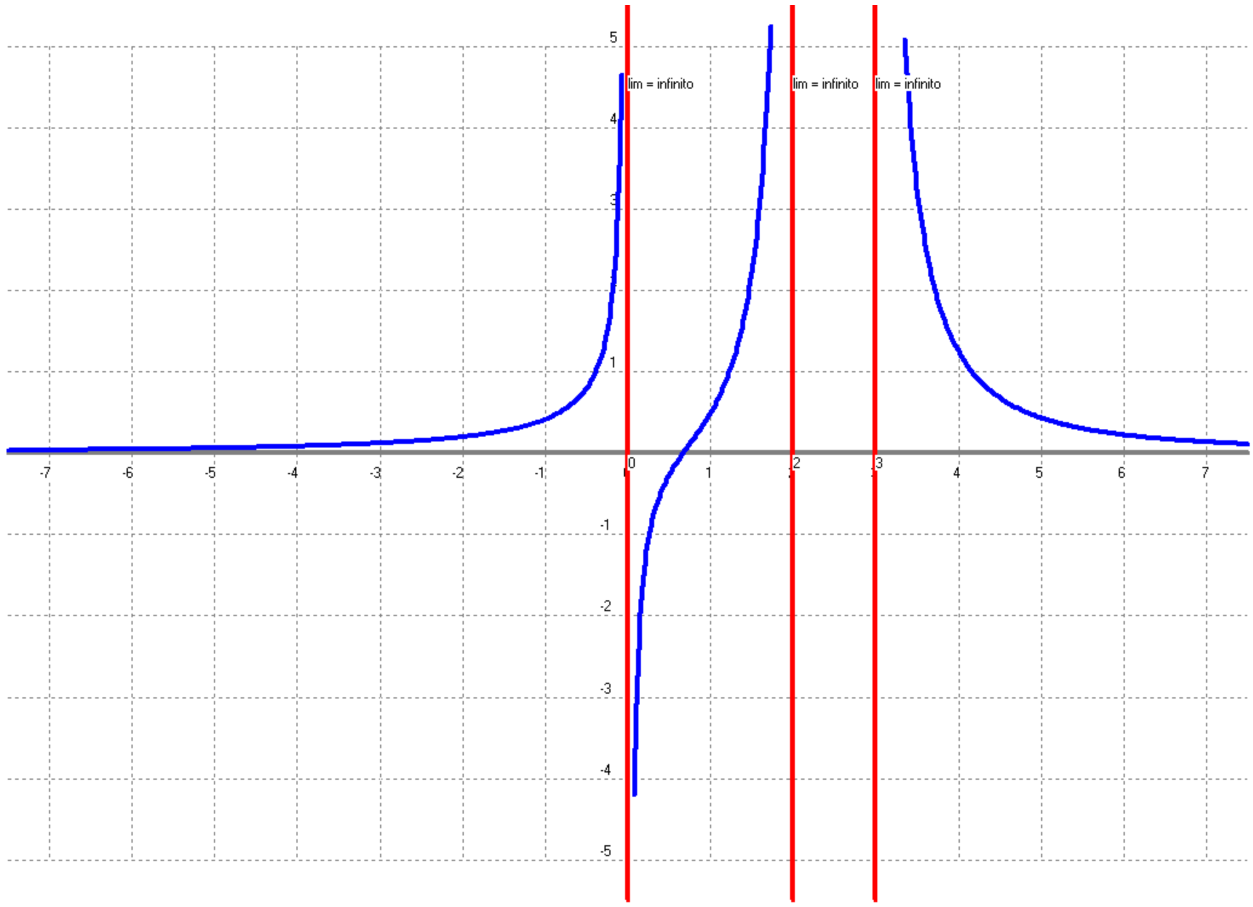
Las asíntotas verticales se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

Para $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-2}$ en $x=2$ hay una asíntota vertical, ya que $x-2=0$

Matemáticas Junio 2013 Modelo F

1. El dominio de definición de la función $h(x) = \dfrac{3x-2}{x^3-5x^2+6x}$ es:

a) $\mathbb{R} - \{2/3\}$.
b) $\{0,2,3\}$.
c) $\mathbb{R} - \{0,2,3\}$.



Discontinuidades aisladas

2. ¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera?

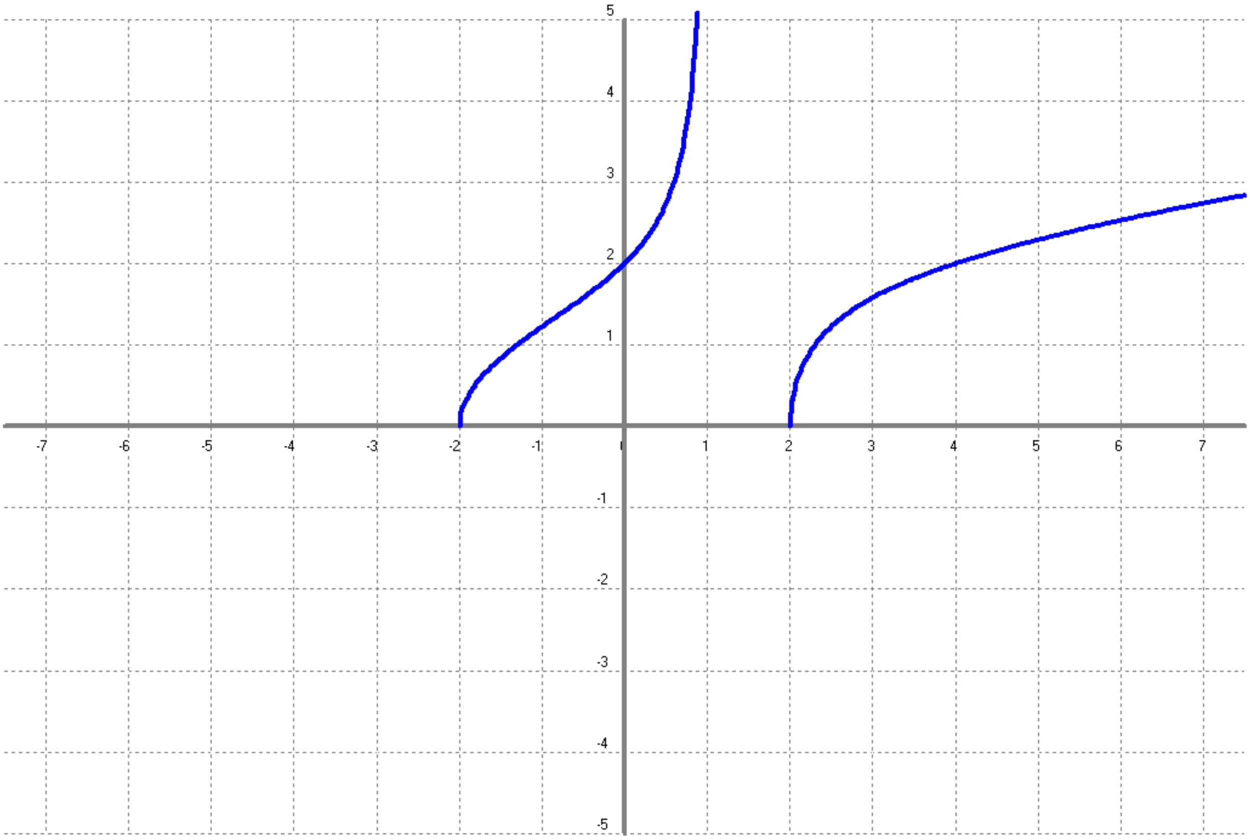
a) El periodo de la función $f(x) = tg(3x)$ es 3π.
b) La función $f(x) = tg(3x)$ no está definida para $x = \pi/6 \mid k\,\pi/3$, donde $k \in \mathbb{Z}$.
c) El periodo de $f(x) = tg(3x)$ es $\pi/6$.

3. Sea la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

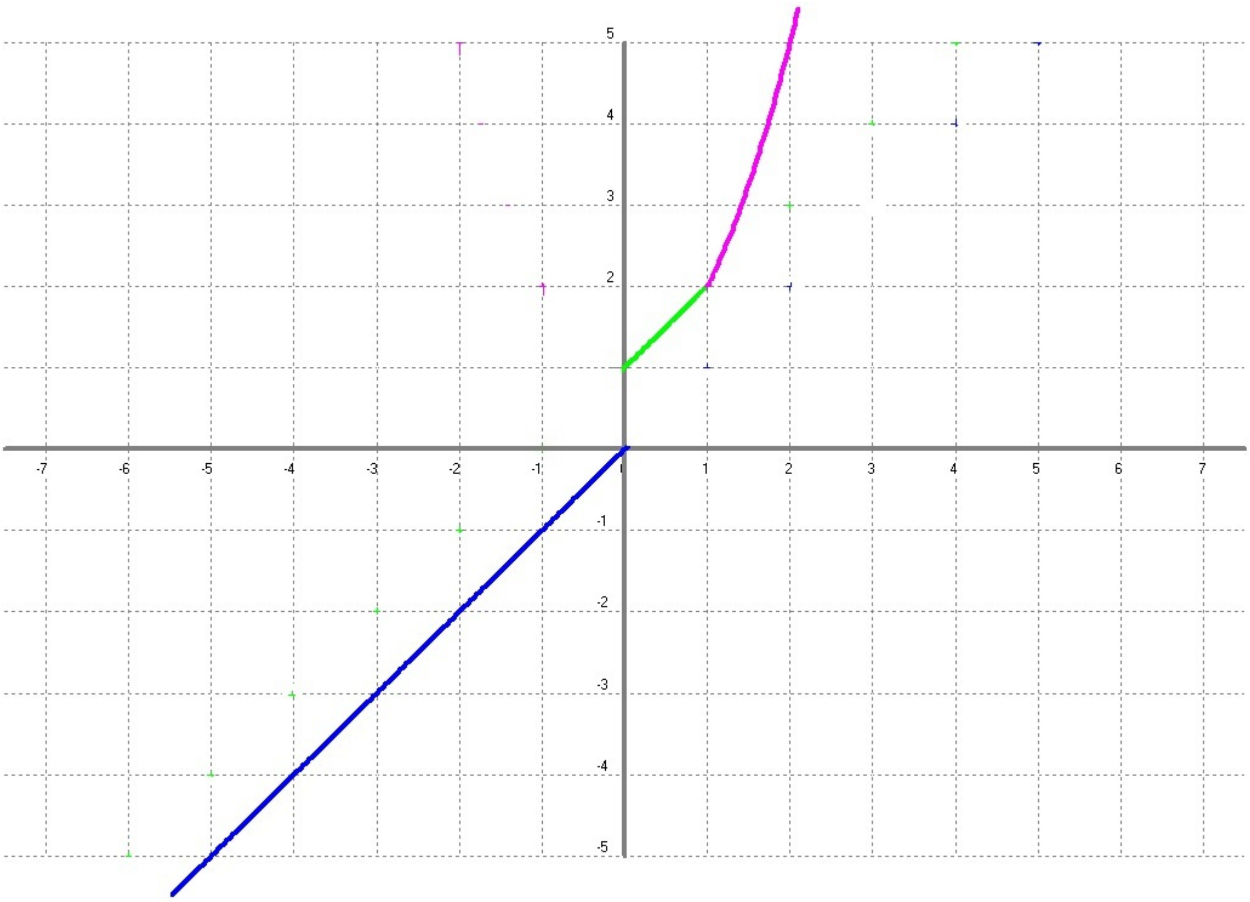
b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$



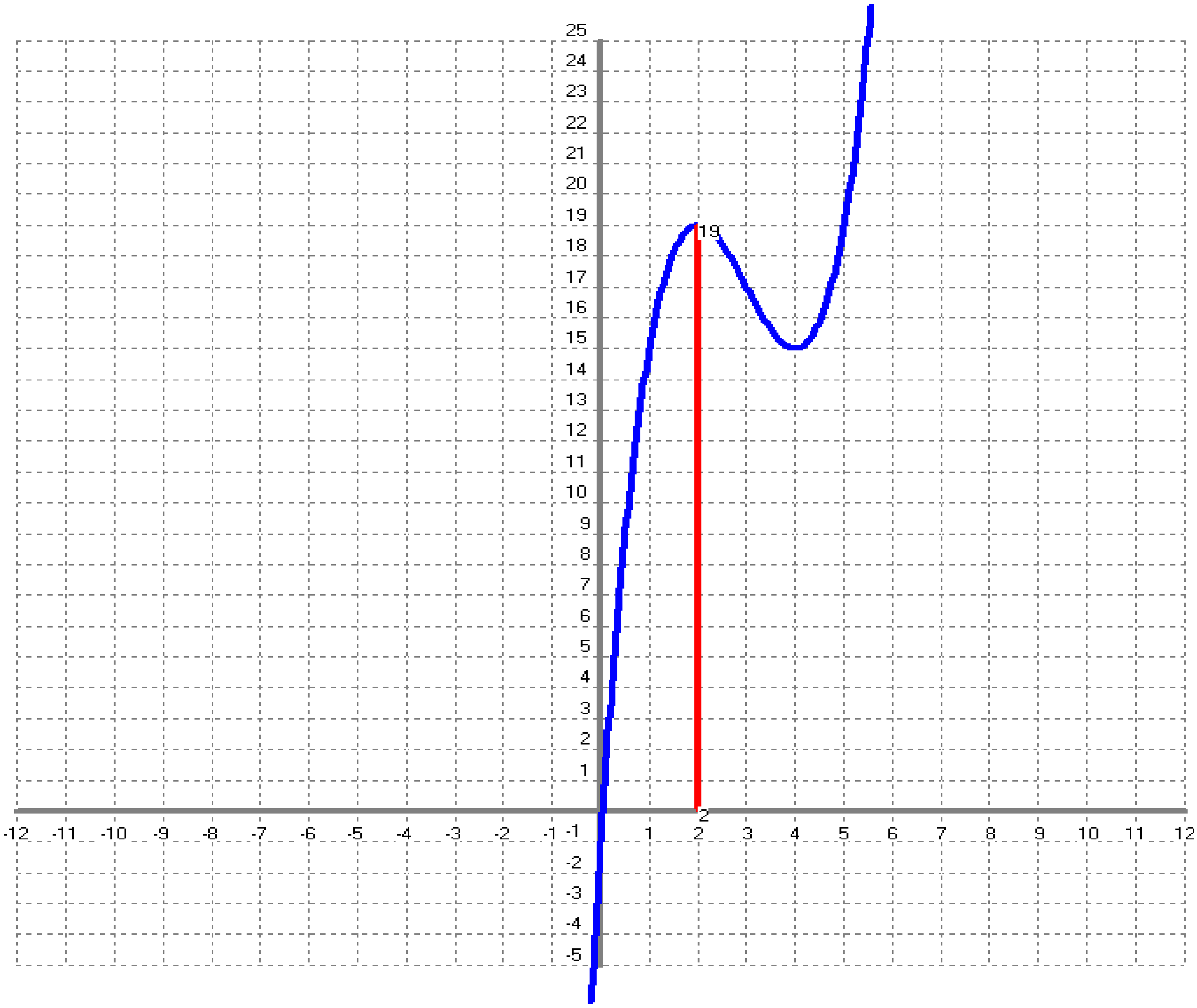
4. Sea $f(x)=\begin{cases} x & si\ x<0 \\ x+1 & si\ x\leq 0\leq 1 \\ x^2+1 & si\ x>1 \end{cases}$ Entonces:

a) f es continua en $\mathbb{R}$.
b) f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$.
c) f es derivable en $(0,\infty)$



5. Consideramos la función: $f\left(x\right)=x^3-9x^2+24x-1$ definida en [0,3]. Entonces:

a) El valor mínimo de $f(x)$ es -1 y se alcanza para $x = 1$.
b) El valor mínimo de $f(x)$ es 19 y se alcanza para $x = 2$.
c) El valor mínimo de $f(x)$ es 339 y se alcanza para $x = 10$.



Máximos

La derivada de $f\left(x\right)=x^3-9x^2+24x-1$ es $f'\left(x\right)=3x^2-18x+24$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \frac{18\pm\sqrt{324-288}}{6}=\frac{18\pm\sqrt{36}}{6}=\frac{18\pm6}{6} \qquad \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$$

En 4 y en 2 tenemos un posible máximo o mínimo.

La derivada segunda es $f''(x) = 6x - 18$

$f''(4) = 6 > 0$, hay un mínimo.

$f''(2) = -6 < 0$, hay un máximo.

6. Una primitiva de $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$ es:

a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+2\ln|x-1|$.

b) $\ln|x^3+x^2-2x|$.

c) $\dfrac{\frac{2}{3}x^3+5x^2-x}{\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2}$

$$x^3+x^2-2x=x\cdot(x-1)\cdot(x+2)$$

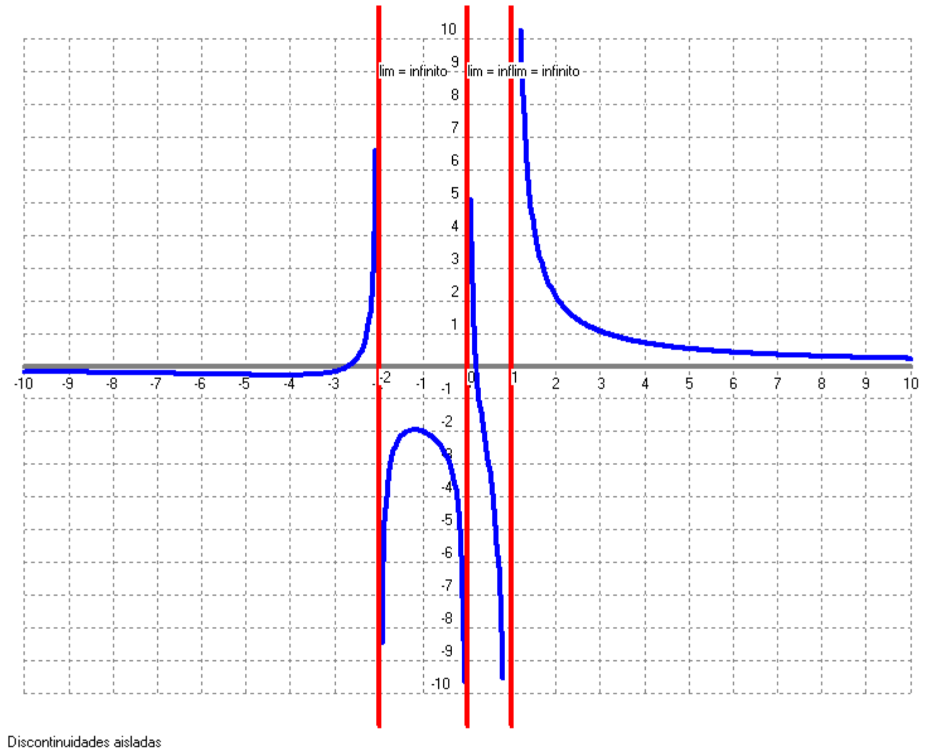
$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+2)}$$

$$2x^2+5x-1=A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)$$

$$\begin{cases} x=0\to 2\cdot 0^2+5\cdot 0-1=A\cdot(0-1)\cdot(0+2)+B\cdot 0\cdot(0+2)+C\cdot 0\cdot(0-1)\to -2A=-1\to A=\frac{1}{2} \\ x=1\to 2\cdot 1^2+5\cdot 1-1=A\cdot(1-1)\cdot(1+2)+B\cdot 1\cdot(1+2)+C\cdot 1\cdot(1-1)\to 3B=6\to B=2 \\ x=-2\to 2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-1=A\cdot(-2-1)\cdot(-2+2)+B\cdot(-2)\cdot(-2+2)+C\cdot(-2)\cdot(-2-1)\to -6C=-3\to C=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\int\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx=\int\frac{1/2}{x}+\int\frac{2}{x-1}+\int\frac{-1/2}{x+2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}+2\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}$$

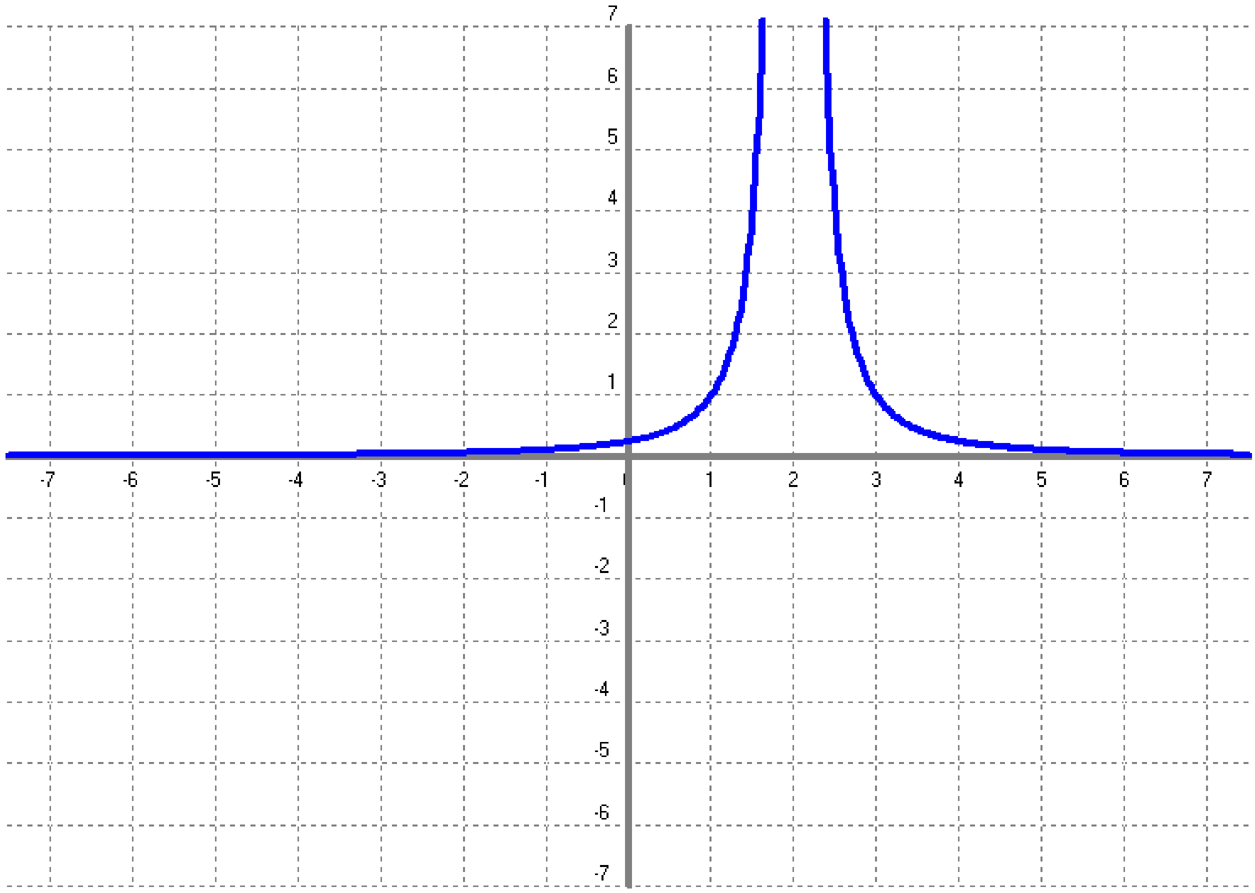
$$\int\frac{1}{2}\ln x+2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+2)=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{(x+2)}+2\ln(x-1)+k$$



Matemáticas Junio 2013 Modelo J

1. La función definida por $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$, para todo $x \neq 2$, verifica

a) Está acotada.
b) Está acotada inferiormente.
c) Está acotada superiormente.

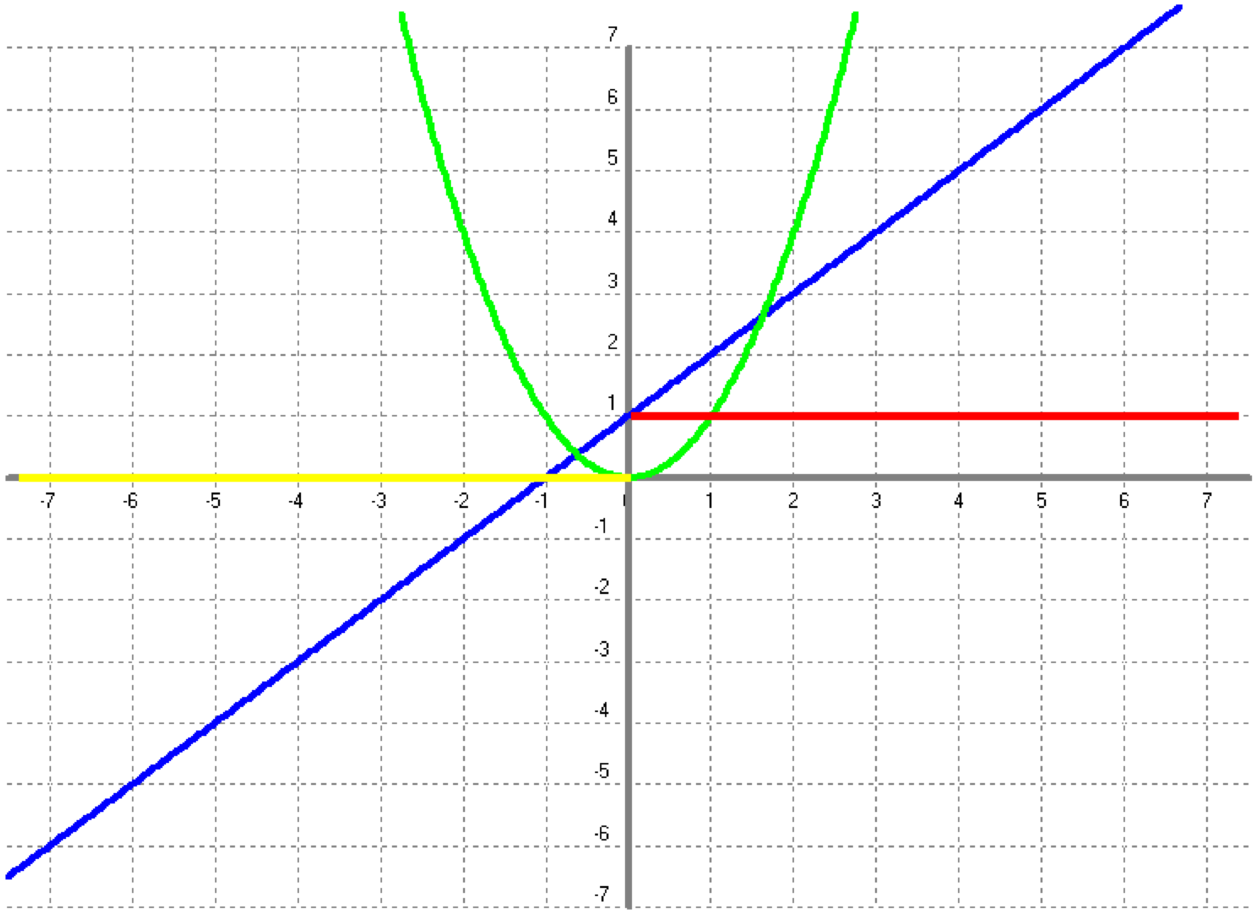


2. En el intervalo $(0,\pi/2)$ el valor exacto de la expresión *tg* (*arc sen* (1/2)) es

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Sean $f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\leq 0\\ 1 & si\ x>0\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x<1\\ x^2 & si\ x\geq 1\end{cases}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:

a) $g\circ f$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) f es continua en $x=0$.
c) g es continua en $x=1$.



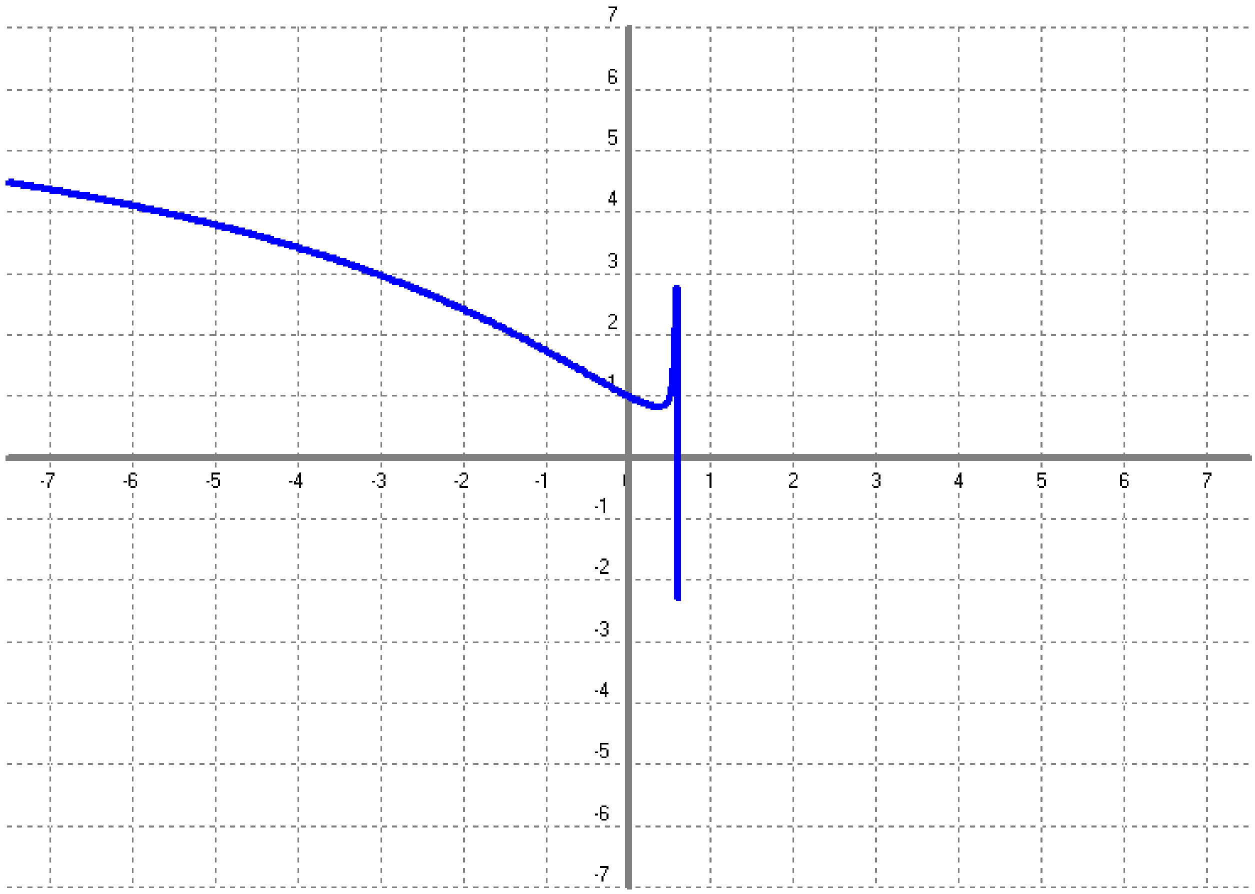
4. El valor de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$ es:

a) 1.
b) e^2.
c) ∞.

Utilizaremos el número ***e*** en el cálculo de límite de expresiones $\left(x_n^{y_n}\right)$, cuando la base tiende a 1 y la sucesión y^n tiende a ∞ la fórmula es:

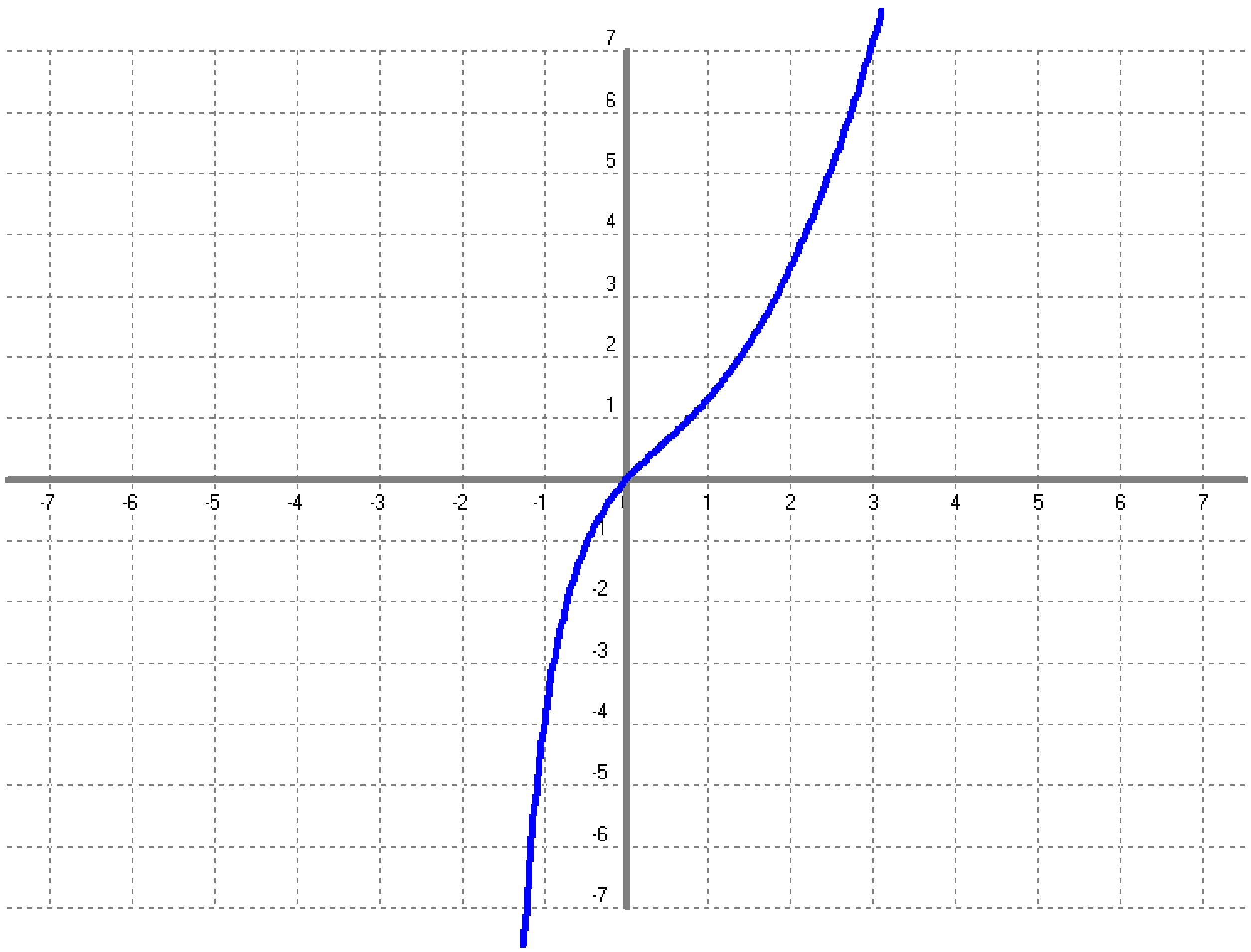
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\,y_n} = e^{\lim y_n (x_n-1)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-2}{x^2-4x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}\right)} = e^2$$



5. Decir si la función $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{x+2}$, presenta alguna de las siguientes simetrías:

a) Respecto del eje Y.
b) Respecto al origen.
c) No es par ni impar.



6. El valor de $\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$ es

a) $4e^4$.
b) -2.
c) e^4-1.

Hacemos un cambio de variable. $x^2=t$, $2xdx=dt$

Si $x=0 \rightarrow t=0$
Si $x=2 \rightarrow t=4$

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx=\int_0^4 e^t\,dt=\left[e^t\right]_0^4=e^4-1$$

Matemáticas Septiembre 2013 Modelo A

1. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x) = x^4 - x^2 - x - 1$ entre $Q(x) = x + 1$?

a) 2.
b) – 2.
c) 0.

2. Sea $\boldsymbol{x}$ un valor real positivo ¿Existe un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2$\boldsymbol{x}$ y 3$\boldsymbol{x}$, y la hipotenusa mida 4$\boldsymbol{x}$?

a) Sí, para cualquier $\boldsymbol{x}$ positivo.
b) Para un único $\boldsymbol{x}$.
c) No, para ningún $\boldsymbol{x}$.

3. Supongamos que α es un número real tal que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix} = 0$, entonces se verifica que:

a) α debe ser un valor menor que 0.
b) α debe ser un valor mayor que 0.
c) No existe tal α.

4. La solución del sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ verifica:

a) $\boldsymbol{x} < -1$.
b) $\boldsymbol{y} < 1$.
c) $\boldsymbol{z} > 1$.

5. ¿Cuál es el producto vectorial de $\boldsymbol{u} = (1, 2, -4)$ y $\boldsymbol{v} = (3, 0, -1)$?

a) (2,1,1).
b) (−2,−11,−6).
c) (1,0,3).

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 3 \\ e_2 & 2 & 0 \\ e_3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -2e_1 - 12e_2 - 6e_3 + e_2 = (-2, -11 - 6)$$

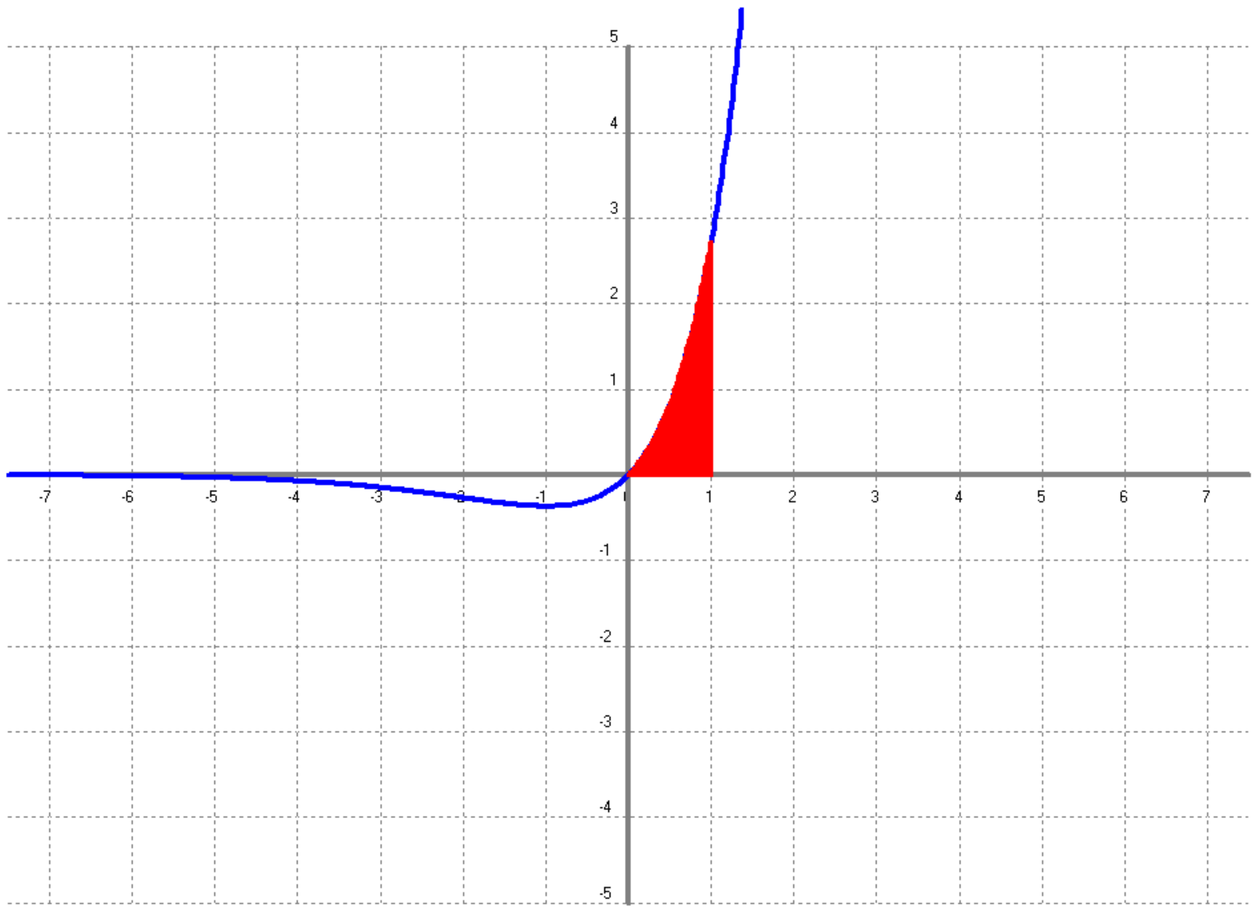
6. El valor de $\int_0^1 x \cdot e^x dx$ es

a) 0.
b) 1.
c) e.

$u = x \rightarrow u' = 1$

$v = e^x \leftarrow v' = e^x$

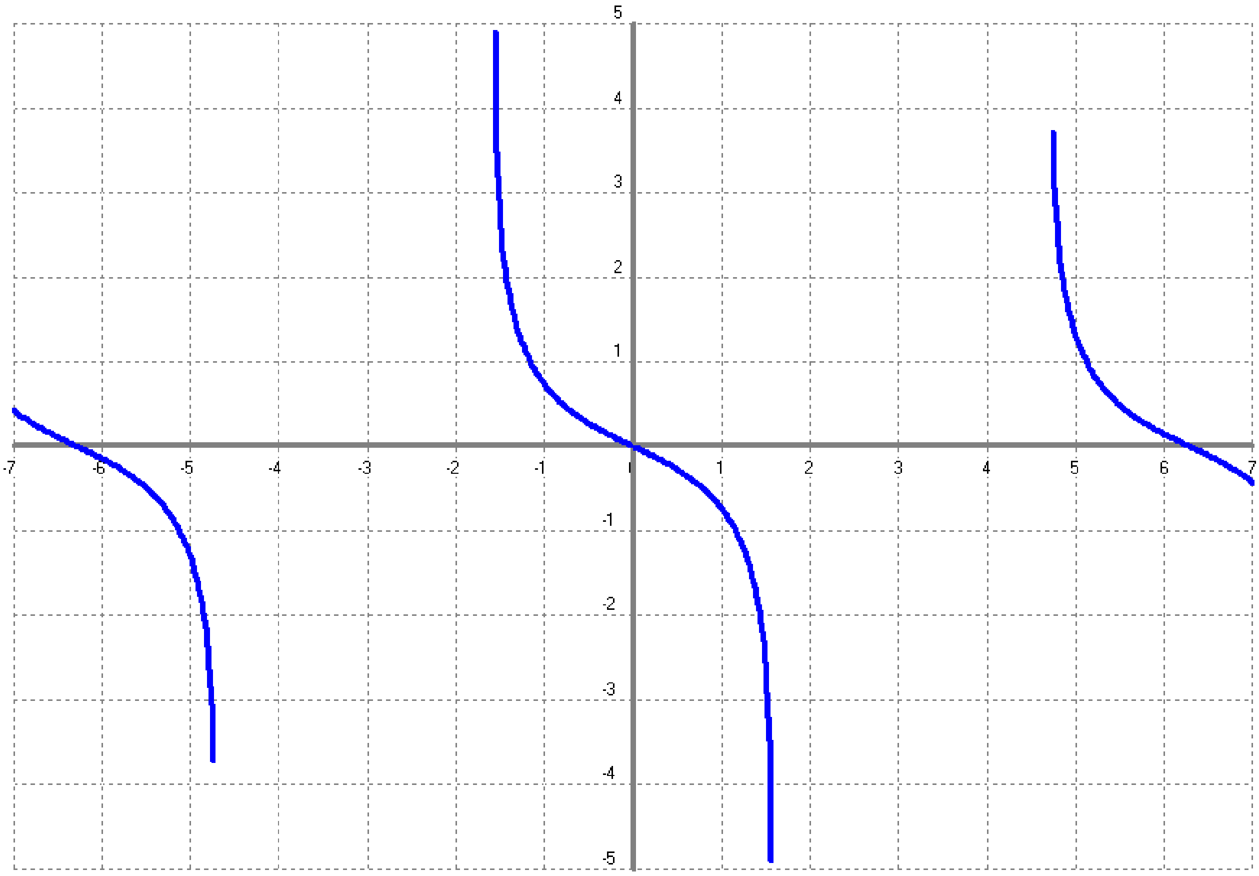
$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = xe^x - \int_0^1 1 \cdot\ e^x = xe^x - e^x = e^x \cdot (x-1) \Big]_0^1 = e^1 \cdot (1-1) - \left(e^0 \cdot (0-1)\right) = 0 - \left(1 \cdot (-1)\right) = 1$$



Integral definida entre 0 i 1 = 1,000231

7. El valor de $\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(cos\ x)}{sin\ x}$ es

a) ∞.
b) 1.
c) 0.



$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(cos\ x)}{sen\ x}$, resulta una indeterminación. Aplicamos L´hopital $\frac{-(tg\ x)}{-cos\ x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(tg\ x)}{-cos\ x} = \frac{0}{-1} = 0$$

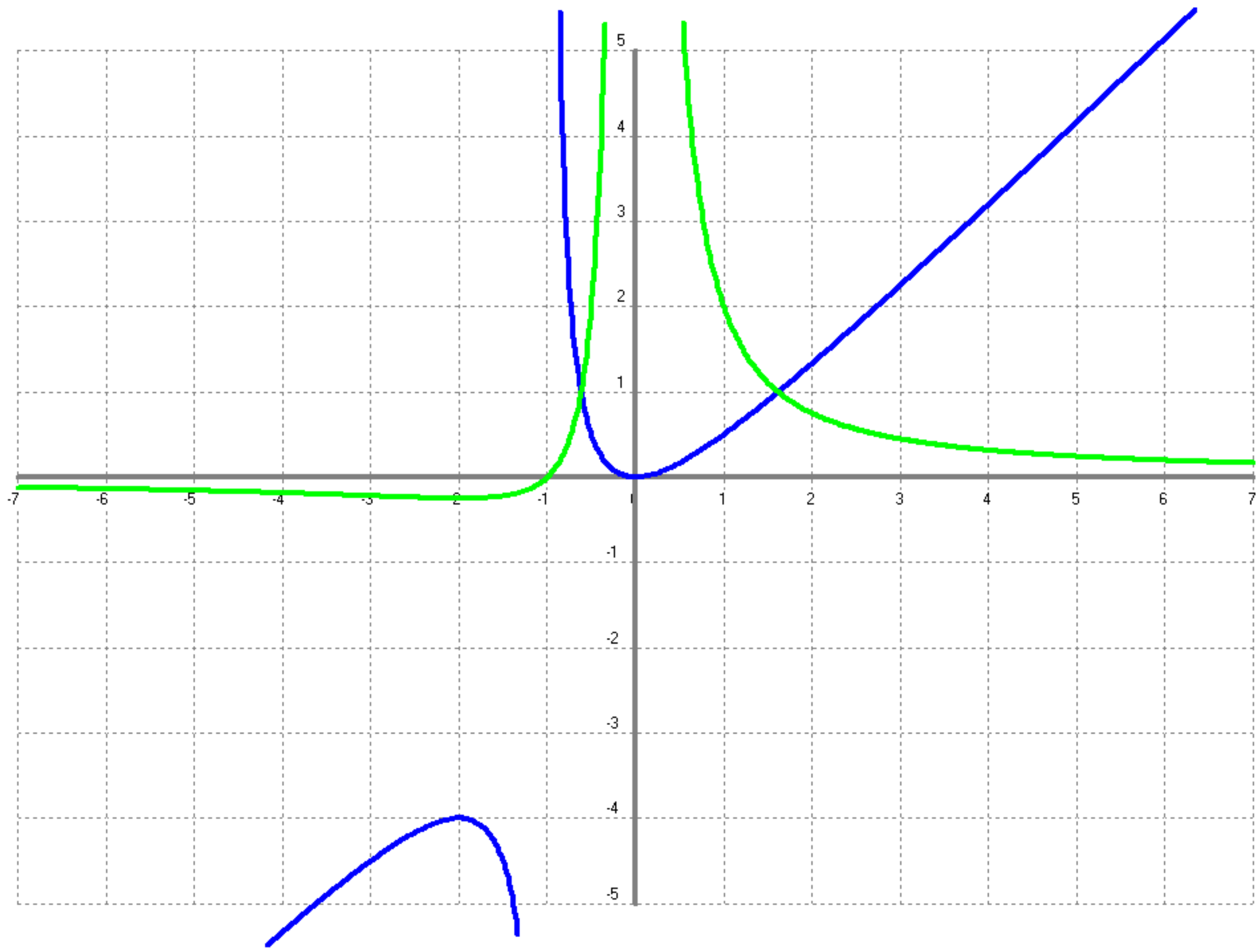
8. La función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} & si\ x \le -2 \\ \dfrac{x+1}{x^2} & si\ x > -2 \end{cases}$ verifica que:

a) Para el valor $x=-2$ es discontinua.
b) En $x=-2$ no está definida.
c) Es continua en $x=-2$.

Hay que estudiar los límites laterales en $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{-1} = -4$$
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x^2} = \frac{-1}{4}$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto es discontinua en $x=-2$.



9. La función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ tiene en el punto (0,0):

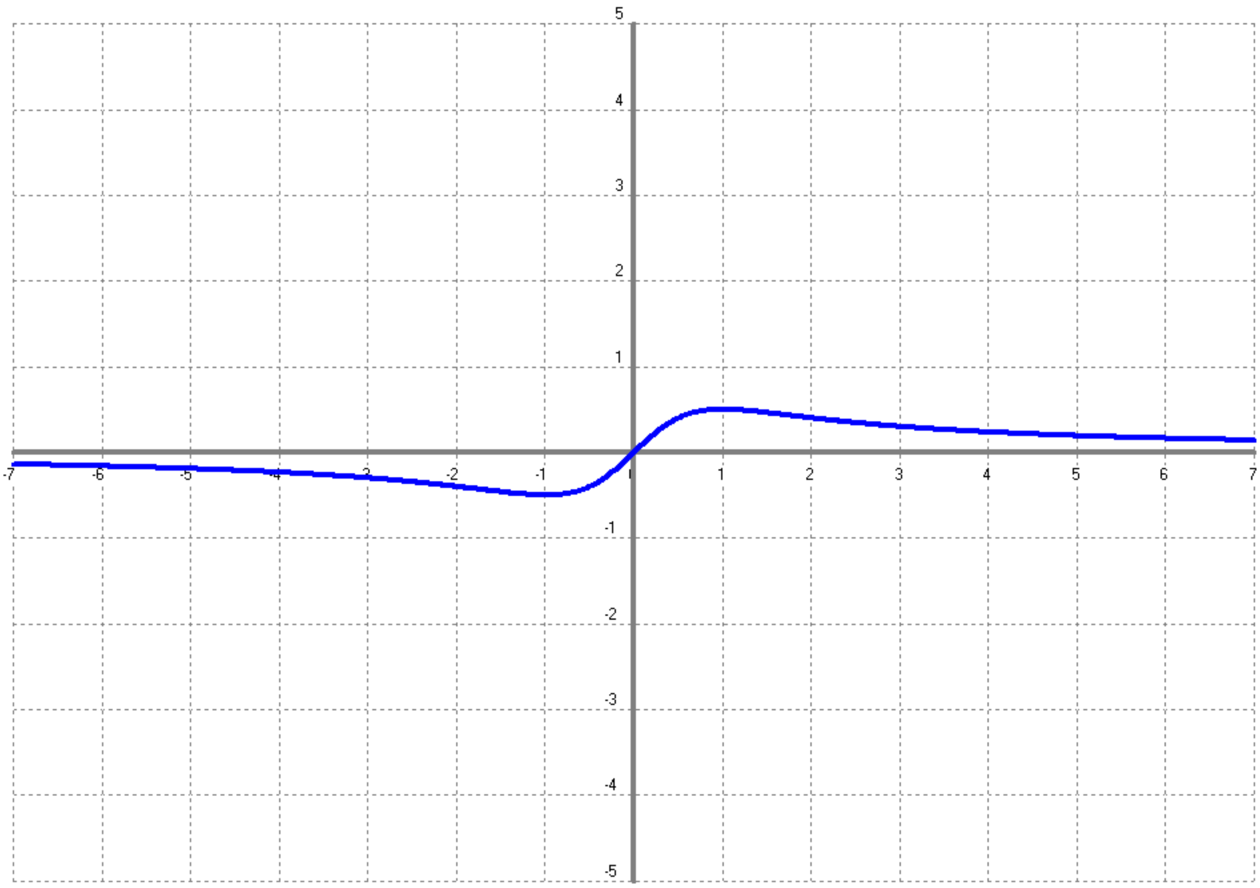
a) Un máximo.
b) Un mínimo.
c) Un punto de inflexión.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^4-\left(-x^2+1\right)\cdot 4\left(x^2+1\right)^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^4-8x\left(-x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^4-8x\left(-x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^4}=-2x-\frac{8x\left(-x^2+1\right)}{x^2+1}=-2x-\frac{-8x^3+8x}{x^2+1}=\frac{-2x^3-2x-\left(-8x^3+8x\right)}{x^2+1}=$$

$$\frac{-2x^3-2x+8x^3-8x}{x^2+1}=\frac{6x^3-10x}{x^2+1}=0$$

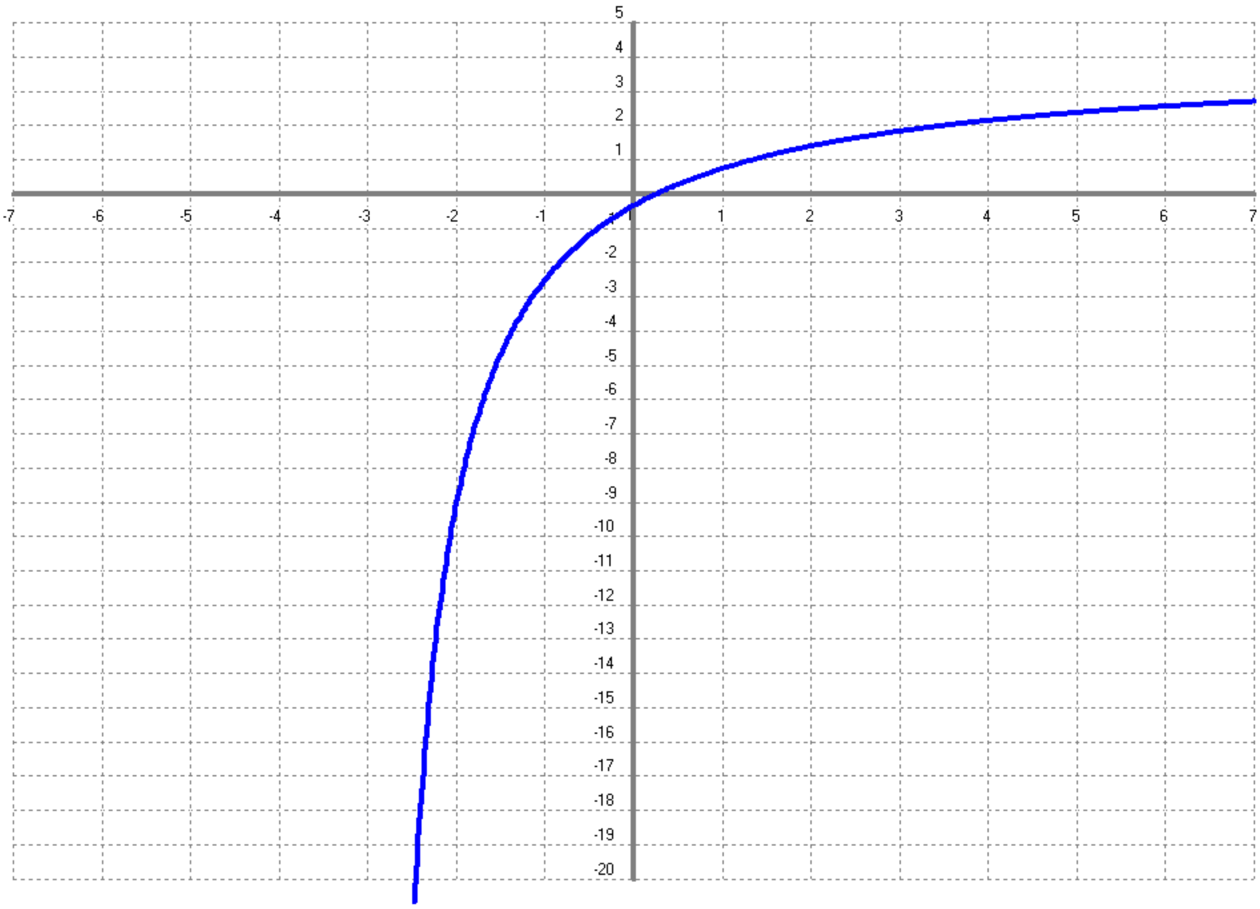


10. La gráfica de la función $f\left(x\right)=\dfrac{4x-1}{x+3}$, tiene la asíntota vertical:

a) $\boldsymbol{y}=4$.
b) $\boldsymbol{y}=3$.
c) $\boldsymbol{x}=-3$.

Asíntotas verticales, se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

$\boldsymbol{x}+3=0;\ \boldsymbol{x}=-3$



Matemáticas Septiembre 2013 Modelo C

1. Descomponga en fracciones simples $\frac{3x-1}{x^2-1}$.

a) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.
b) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}$.
c) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$.

2. ¿Cuánto es $2\pi/3 + \pi/2$ radianes en grados?

a) 120 grados.
b) 210 grados.
c) 150 grados.

3. Calcular $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.
c) No se pueden multiplicar ambas matrices.

4. ¿Para qué valor de α el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+y+z=\alpha \\ 4x+3y+2z=\alpha \end{cases}$ es compatible indeterminado?

a) $\alpha = 1$.
b) $\alpha = 2/3$.
c) $\alpha = 0$.

5. ¿Cuál es la distancia del punto A = (1,1) a la recta $4x - 3y + 1 = 0$?

a) 1
b) 2/5
c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6. La función $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$ es creciente en:

a) $(-\infty,1)$.
b) $(-\infty,2)$.
c) $(1,2)$.

Miramos dos puntos a ver cómo se comporta la función. O también,

Si *f* es una función definida y derivable en un intervalo I:

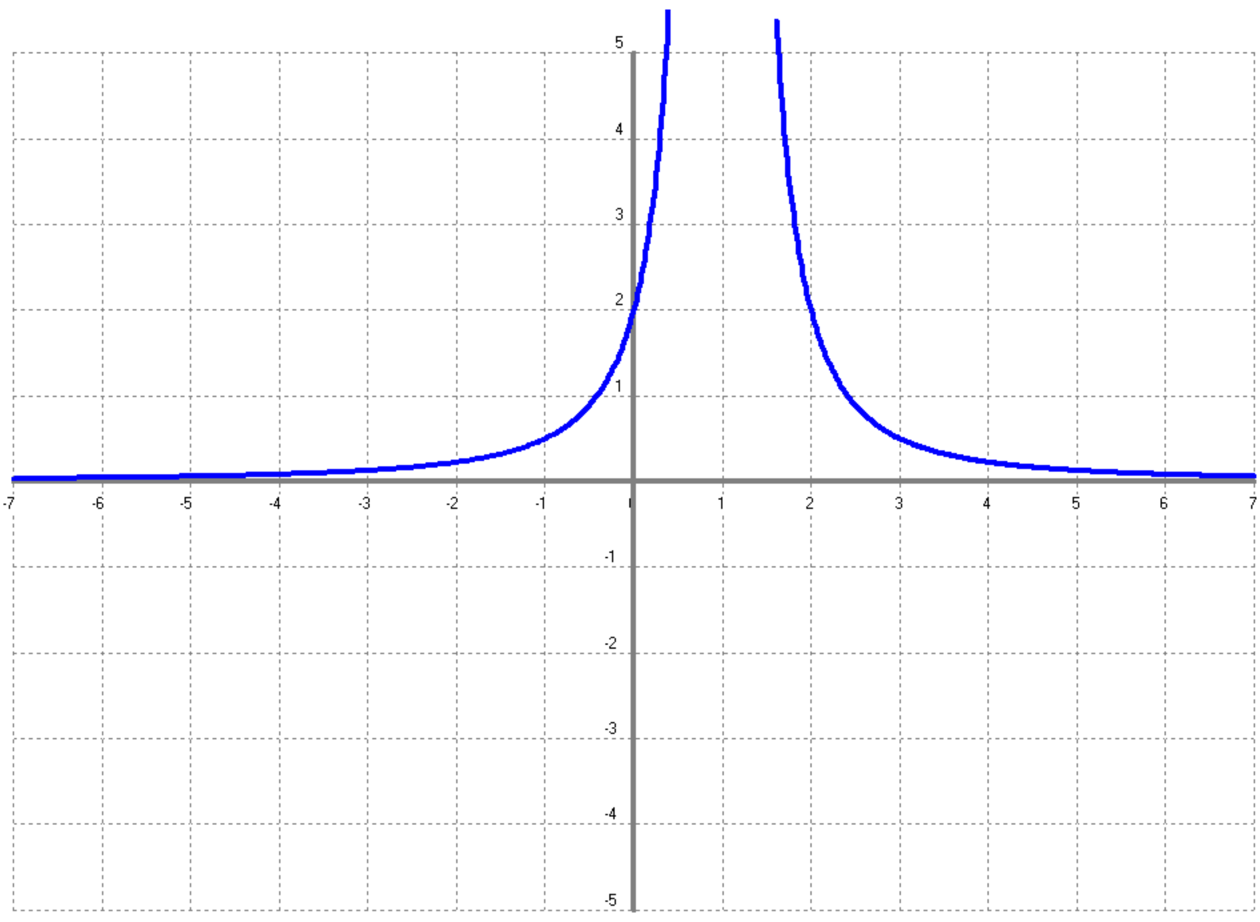
- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\geq 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f'\leq 0$.

$$f'(x)=\frac{-2\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{-4x+4}{(x-1)^4}$$

$$f'(-3)=\frac{-4(-3)+4}{(-3-1)^4}=\frac{16}{(-4)^4}=\frac{16}{256}=\frac{1}{16}\geq 0$$

$$f'(0)=\frac{-4(0)+4}{(0-1)^4}=\frac{4}{1}=4\geq 0$$

En el intervalo $(-3,0)$, la función crece. Recordar que no puedo comprobar en $\boldsymbol{x}=1$ porque no está definida.



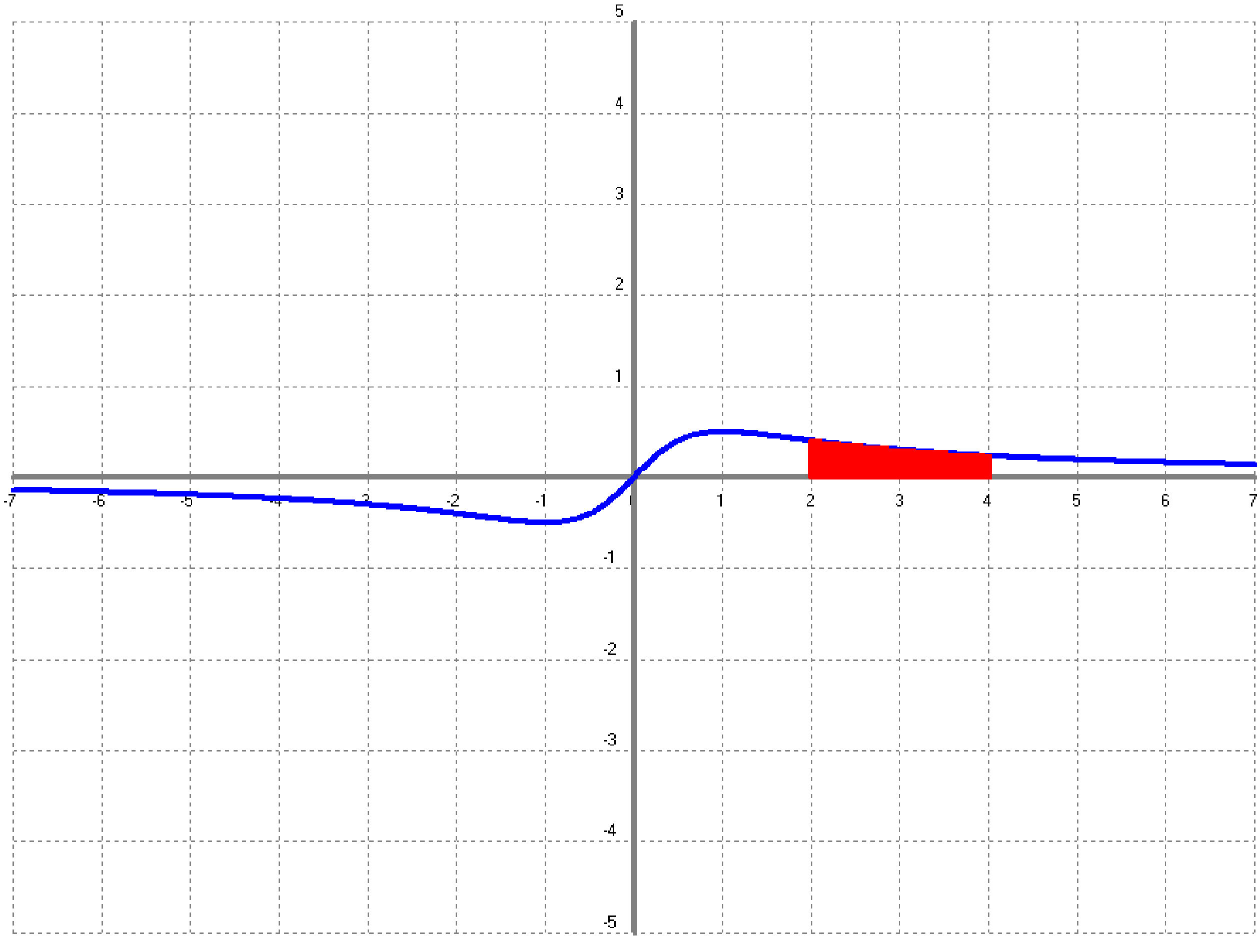
7. El valor de $\int_2^4 \frac{x}{x^2+1}dx$

a) $\frac{1}{2} ln \frac{17}{5}$

b) $ln \frac{17}{5}$

c) $2ln \frac{17}{5}$

$$\int_2^4 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big]_2^4 = \frac{1}{2}\ln\left(4^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2^2+1\right) = \frac{1}{2}\ln 17 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln\frac{17}{5}$$



Integral definida entre 2 i 4,01333 = 0,612359

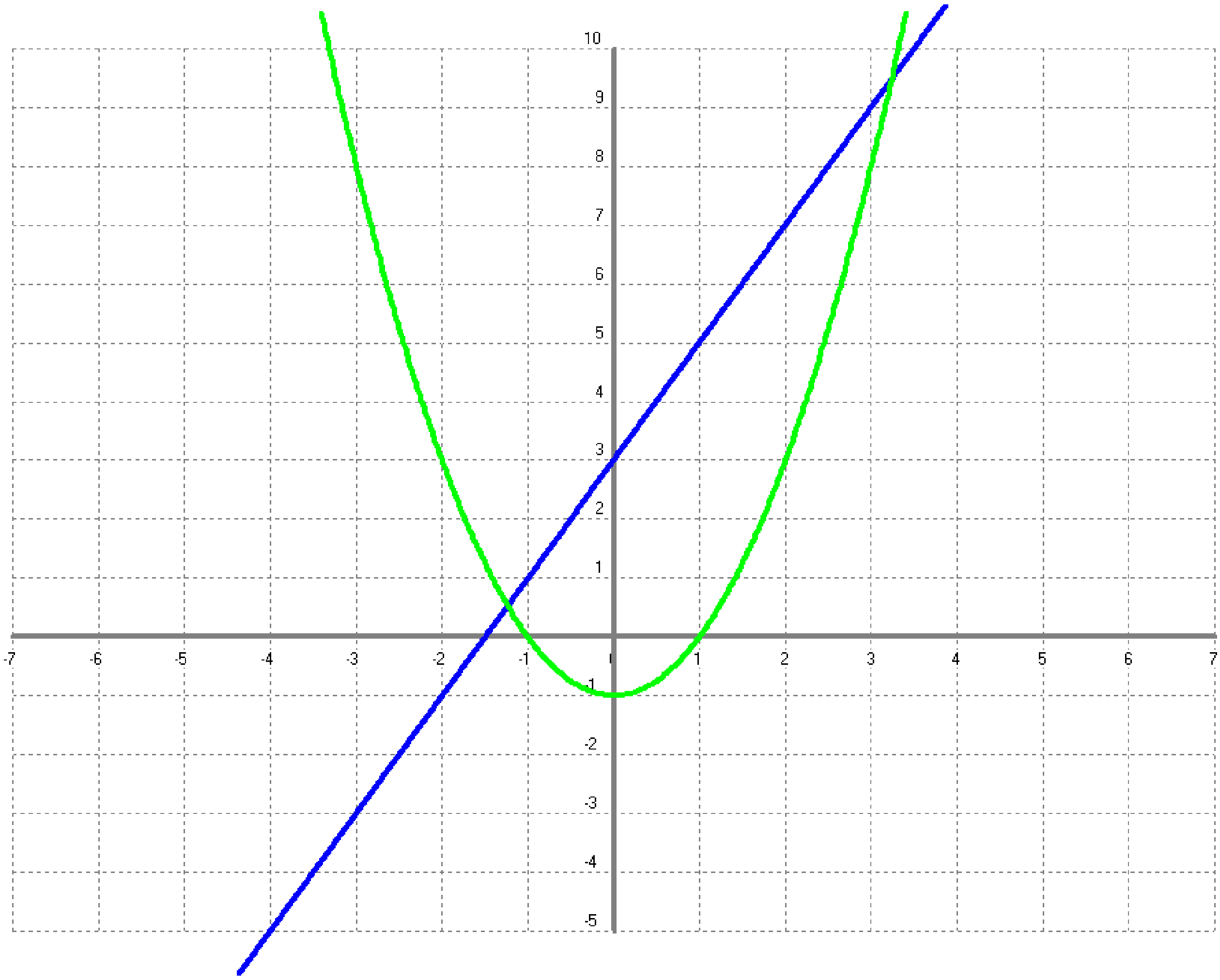
8. La función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 \; si \; x \le 2 \\ x^2-1 \; si \; x>2 \end{cases}$ verifica que:

a) Es continua en $\boldsymbol{x} = 2$.
b) Es discontinua en $\boldsymbol{x} = 2$.
c) No está definida en $\boldsymbol{x} = 2$.

Hay que estudiar los límites laterales en $\boldsymbol{x} = 2$.

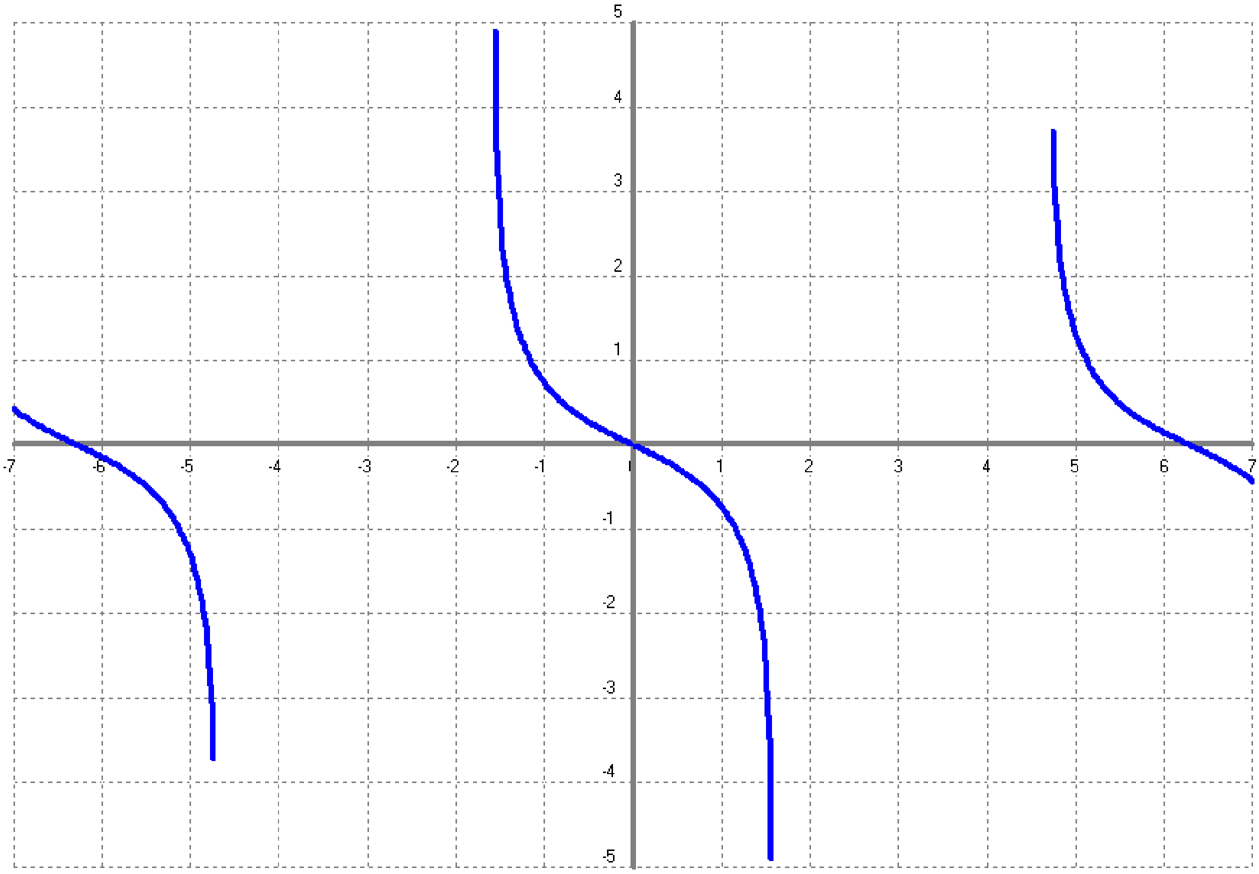
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x+3 = 7$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2-1 = 3$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto es discontinua en $\boldsymbol{x} = 2$.



9. El valor del $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$ es:

a) ∞.
b) 1.
c) 0.

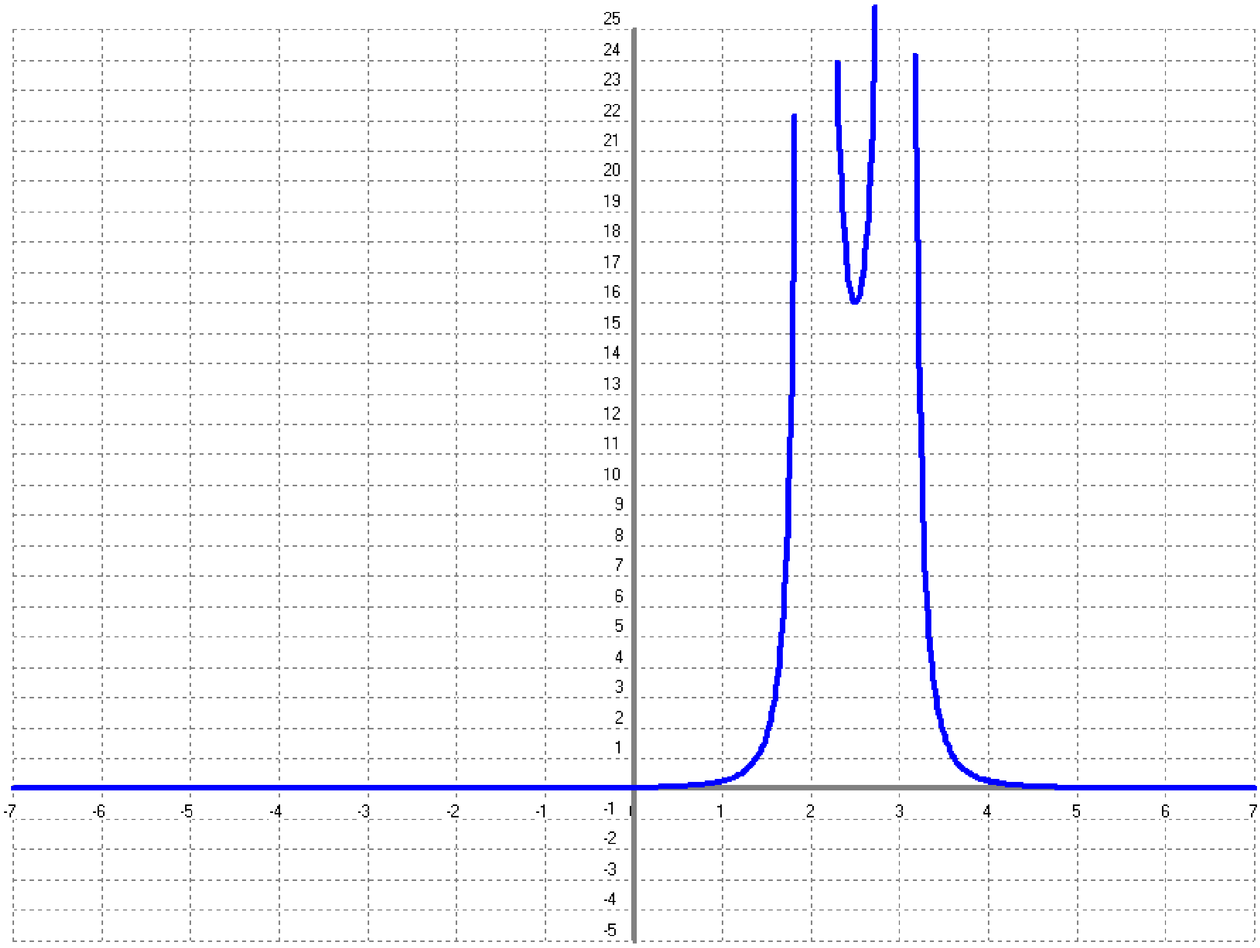


$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$, resulta una indeterminación. Aplicamos L´hopital $\frac{-(tg\ x)}{-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(tg\ x)}{-\cos x} = \frac{0}{-1} = 0$$

10. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ es:

a) $(-\infty,2) \cup (3,+\infty)$.
b) $\mathbb{R} - \{2,3\}$.
c) $(2,3)$.



Raíces

Asíntotas verticales, se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

$x^2 - 5x + 6$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Matemáticas Septiembre 2013 Modelo D

1. Calcule el coeficiente que acompaña a $\boldsymbol{x}$ al desarrollar $(3\boldsymbol{x} + 2)^3$.

a) 36.
b) 12.
c) 24.

2. En un triángulo rectángulo un cateto mide 6 y el ángulo opuesto mide π/6, ¿Cuánto vale la hipotenusa?

a) $10\sqrt{6}$.
b) 12.
c) $4\sqrt{3}$.

3. Calcular el rango de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) 1
b) 2
c) 3

4. ¿Tiene alguna solución el siguiente sistema? $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = -4 \\ -x + 2y = 9 \end{cases}$

a) No tiene ninguna solución.
b) Tiene una única solución.
c) Tiene infinitas soluciones.

5. Hallar la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A = (1,1) y es perpendicular a $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$

a) $x - y = 0$.
b) $x + y = 2$.
c) $2x + y = 3$.

$\begin{cases} t = x + 1 \\ t = -y + 1 \end{cases}; \quad x + 1 = -y + 1; \quad y = -x$

La ecuación de la perpendicular a la recta $y = ax + b$ por el punto (x_0, y_0) es $y = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0$

$y = 1(x-1) + 1; \qquad y = x; \qquad y - x = 0$

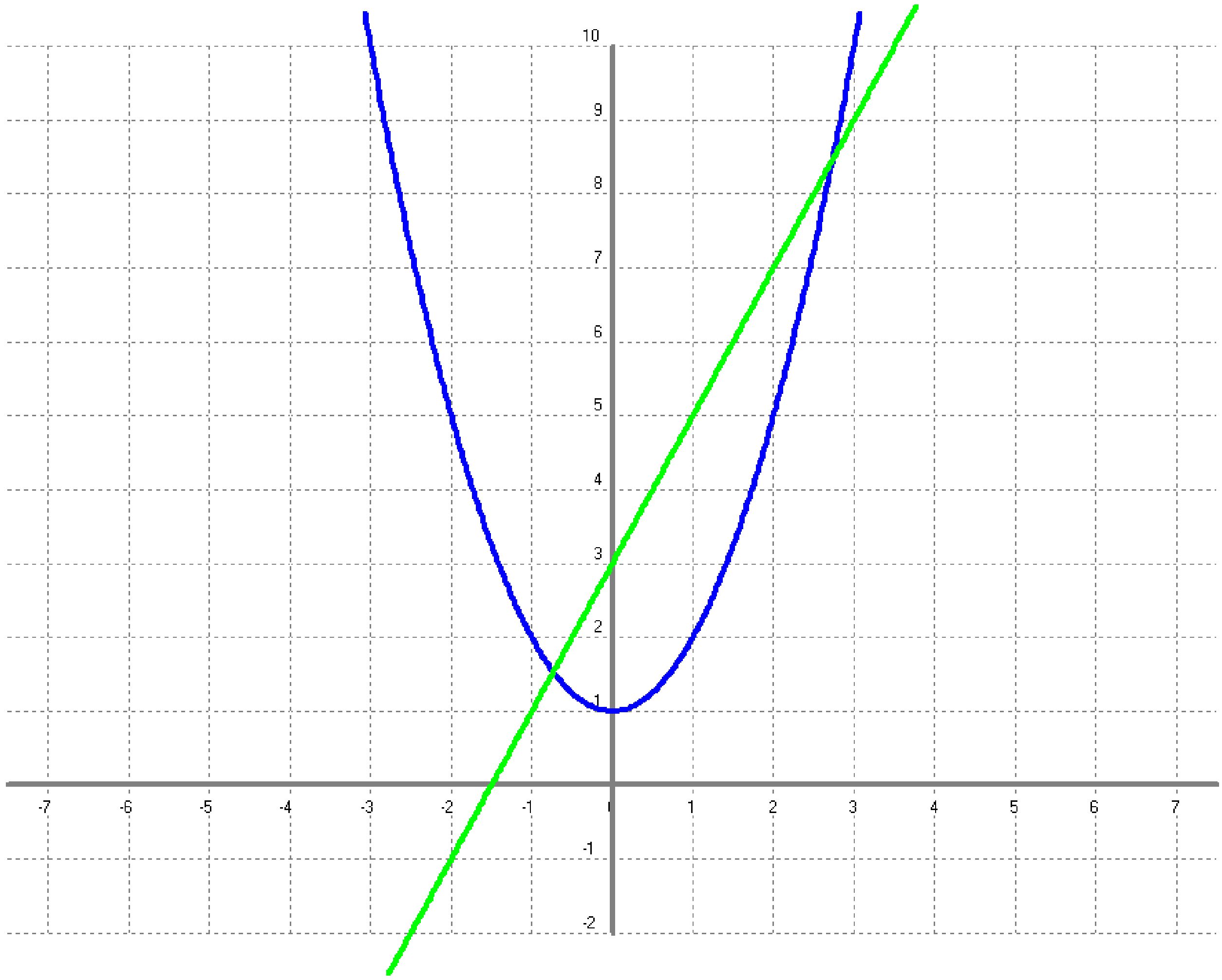
6. La función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \; si \; x\le 1 \\ 2x+3 \; si \; x>1 \end{cases}$ verifica que:

a) Es discontinua en $\boldsymbol{x} = 1$.
b) No está definida en $\boldsymbol{x} = 0$.
c) Es continua en $\boldsymbol{x} = 1$.

Hay que estudiar los límites laterales en $\boldsymbol{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x+3 = 5$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto es discontinua en $\boldsymbol{x} = 1$.



7. La función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ tiene en el punto (2,19):

a) Un máximo relativo.
b) Un máximo absoluto.
c) Un mínimo.

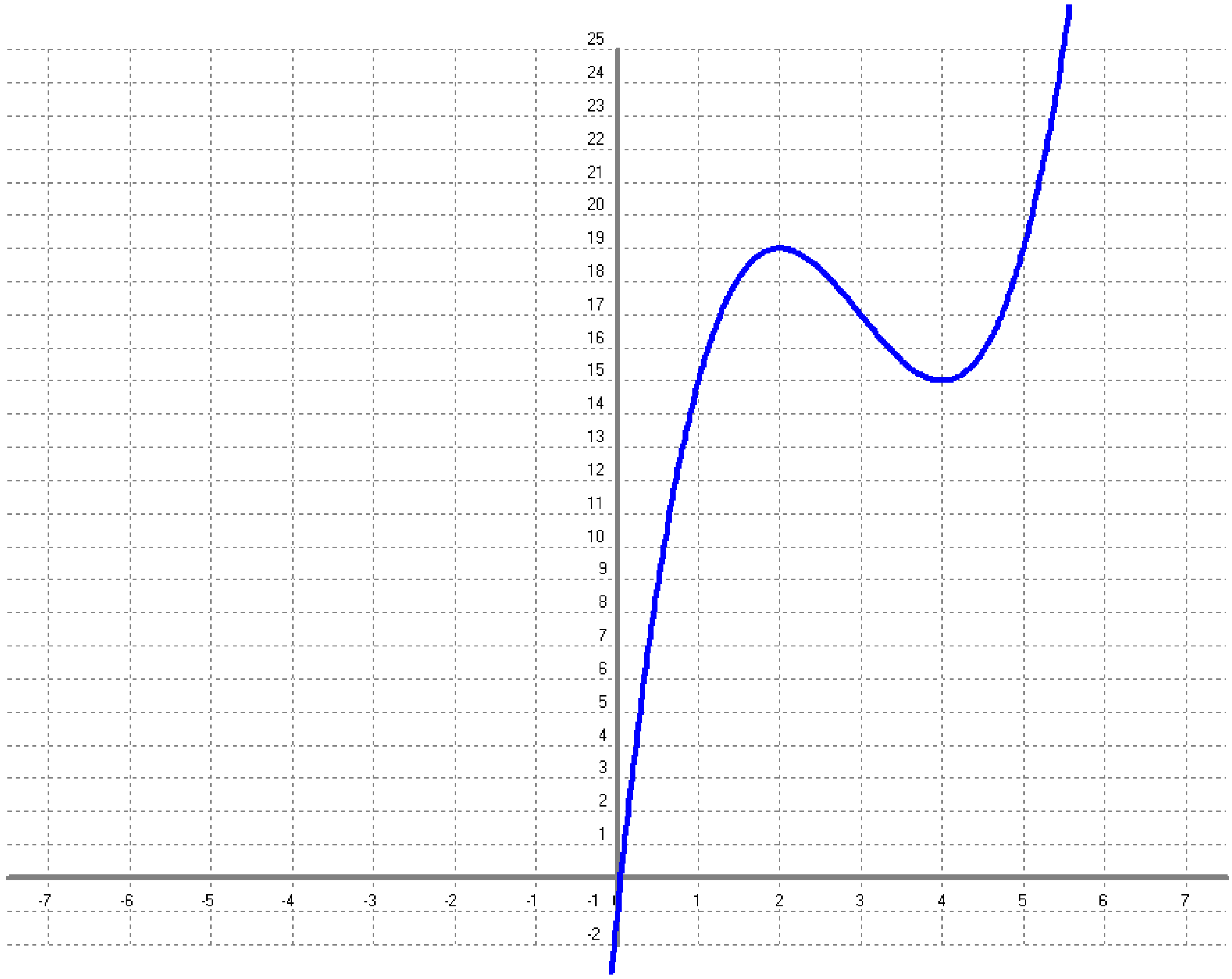
La derivada de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ es: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$; $x = 2$ y en $x = 4$ tenemos un posible máximo o mínimo.

La derivada segunda es $f''(x) = 6x - 18$

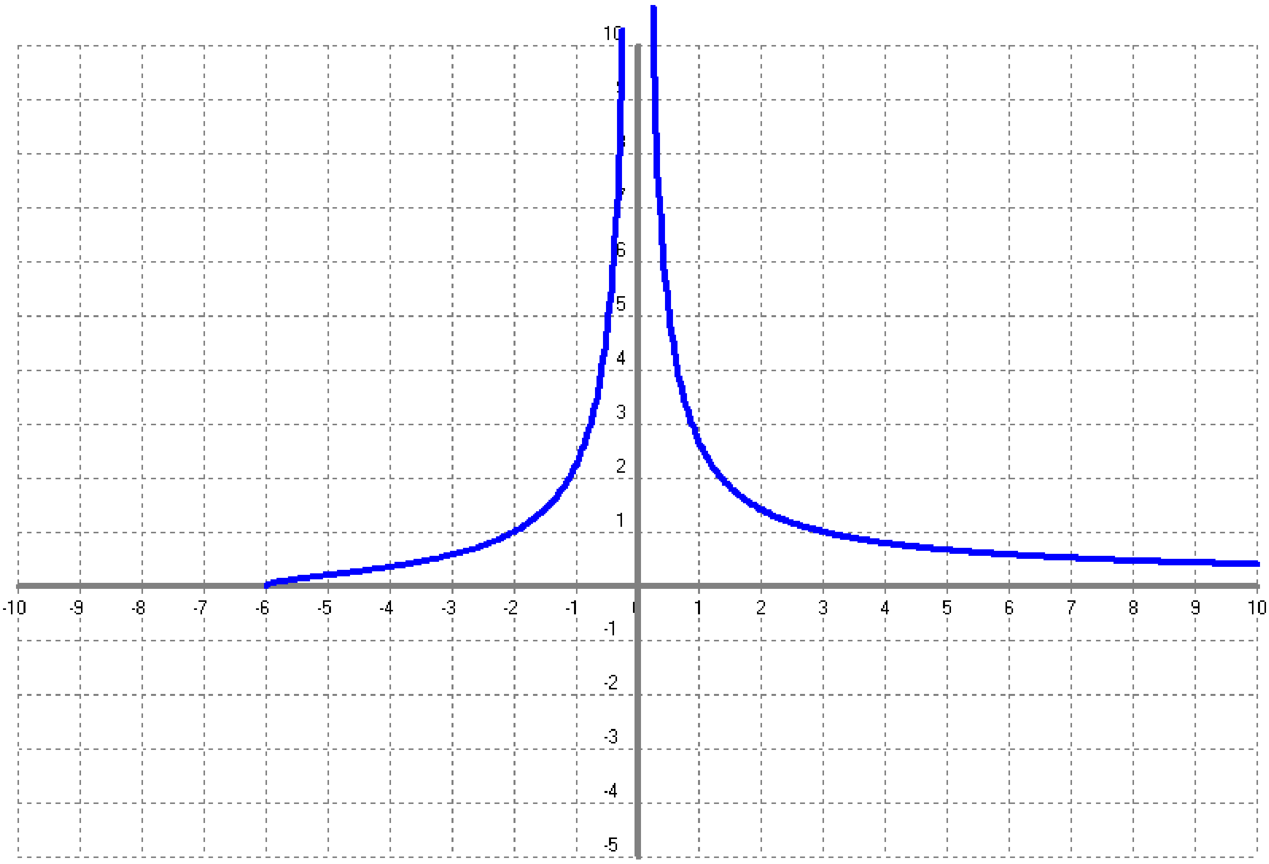
$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$, hay un máximo.

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$, hay un mínimo.



8. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+6}{x^2}}$ es:

a) $\mathbb{R}-\{-6,0\}$.
b) $[-6,0)\cup(0,+\infty)$.
c) $(-\infty,-6]\cup(0,+\infty)$.



Asíntotas verticales, se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

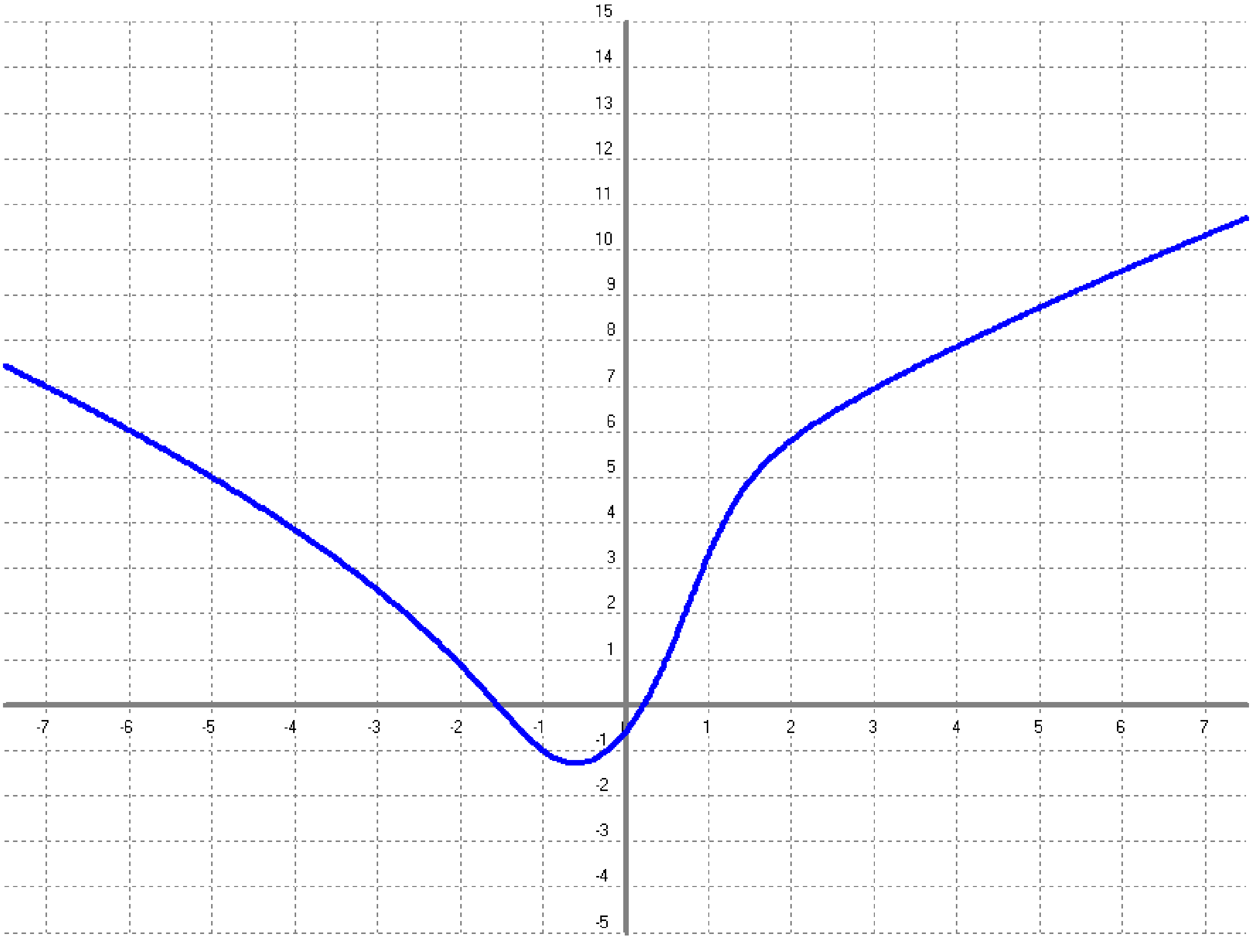
Para $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+6}{x^2}}$, en $x = 0$, tenemos una asíntota vertical.

Y además como tenemos una raíz tenemos que mirar que pasa en el numerador x + 6 = 0.

Para valores mayores o iguales de −6 la función está definida excepto para $x = 0$.

9. El valor de $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-1}{\sqrt[3]{2x^4-x+5}}$ es:

a) 3/2.
b) $3/\sqrt[3]{2}$.
c) ∞.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x-1}{\sqrt[3]{2x^4-x+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{2x^4}{x^6}-\dfrac{x}{x^6}+\dfrac{5}{x^6}}} = \frac{3}{0} = \infty$$

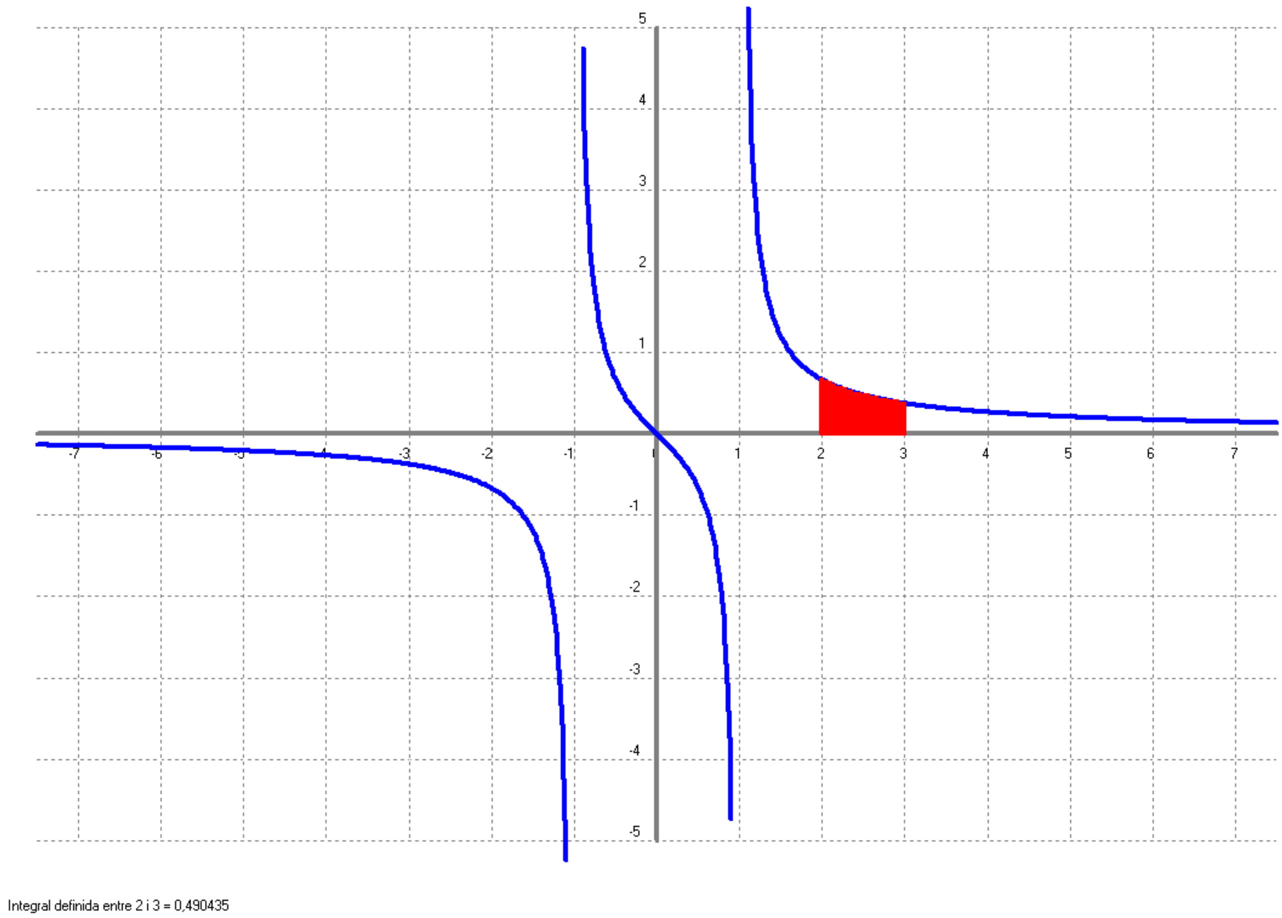
10. El valor de $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

a) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

b) $\ln\frac{9}{4}$

c) $arctg\,\frac{8}{3}$

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\left(3^2-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2^2-1\right) = \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$



Matemáticas Febrero 2014 Modelo A

1. Calcule el coeficiente que acompaña a $\boldsymbol{x^2y^3}$ al desarrollar $(2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^5$.

a) 10.
b) 20.
c) 40.

2. Sea ***x*** un valor real positivo ¿Existe un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4, y cuya hipotenusa mida 5***x***?

a) Sí, para cualquier ***x*** positivo.
b) Únicamente cuando ***x*** = 1.
c) No, para ningún ***x***.

3. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ¿Qué afirmación e cierta?

a) $A = A^2$.
b) $A^2 = A^3$.
c) $A^3 = A^4$.

4. ¿Cuándo el sistema $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ \alpha y + z = 1 \\ \alpha z = 1 \end{cases}$ es ***compatible determinado***?

a) Si $\alpha = 0$.
b) Si $\alpha \neq 0$.
c) Para ningún valor de α es compatible determinado.

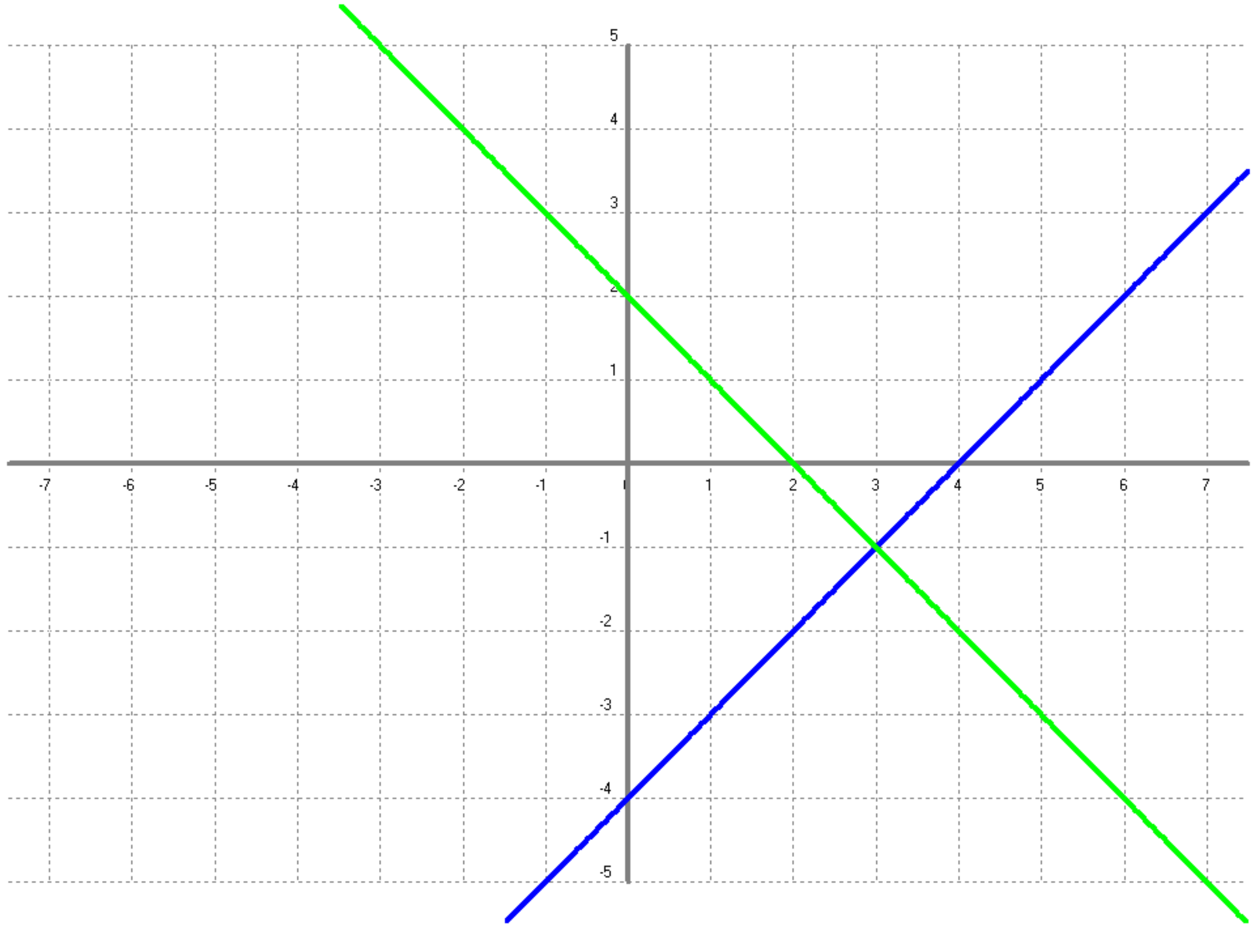
5. ¿Qué recta que pasa por el punto A = (1,1) y es perpendicular a $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$?

a) $x + y = 2$.
b) $x - y = 0$.
c) $7x - 3y = 4$.

$\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$; $\begin{cases} t = x - 7 \\ t = y - 3 \end{cases}$; $x - 7 = y - 3$; $y = x - 4$

La ecuación de la perpendicular a la recta $y = ax + b$ por el punto (x_0, y_0) es $y = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0$

$y = -1(x - 1) + 1$; $y = -x + 2$; $y + x = 2$



6. ¿Cuál es la distancia del punto A = (1,1,1) al plano $x + y + z = 0$?

a) 1.
b) $\sqrt{3}$.
c) 3.

Matemáticas Febrero 2014 Modelo B

1. ¿Cuál es el cociente de dividir $P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$ entre $Q(x) = x + 1$?

a) $x^3 + 3x^2 + 5x - 9$.
b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$.
c) $3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$.

2. Sea ***T*** un triángulo rectángulo que tiene sus dos catetos de igual longitud. Sea ***h*** la longitud de la hipotenusa de ***T*** y sea ***c*** la longitud de cada uno de los catetos de ***T***. Entonces:

a) Siempre se tiene que $\boldsymbol{h} < 2\boldsymbol{c}$.
b) Siempre se tiene que $\boldsymbol{h} = 2\boldsymbol{c}$.
c) Siempre se tiene que $\boldsymbol{h} > 2\boldsymbol{c}$.

3. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ¿Qué afirmación e cierta?

a) $A^2 = A^3$.
b) $A \neq A^2$.
c) $A^3 = \boldsymbol{O}$.

4. ¿Cuándo el sistema $\begin{cases} \beta x + y + z = \beta \\ \beta y + z = \beta \\ \beta z = \beta \end{cases}$ es ***incompatible***?

a) Si $\beta = 0$.
b) Si $\beta \neq 0$.
c) Para ningún valor de β es ***incompatible***.

5. ¿Cuál es la distancia del punto A = (2,5) a la recta $x = 3$?

a) 1.
b) 2.
c) 3.

6. Consideramos los vectores $\boldsymbol{u} = (1,1,\alpha)$, $\boldsymbol{v} = (1,1,\beta)$, $\boldsymbol{w} = (1,1,\gamma)$. Entonces:

a) Para todo α, β y γ los vectores ***u, v*** y ***w*** son linealmente dependientes.
b) Para todo α, β y γ los vectores ***u, v*** y ***w*** son linealmente independientes.
c) No se da ninguna de las dos circunstancias anteriores.