ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS

VOLUMEN II

Centro Asociado Palma de Mallorca

Tutor: Antonio Rivero Cuesta

0 PRELIMINARES. NÚMEROS REALES

0.1 El conjunto de los número reales

La representación más común de ℝ hace ver al conjunto como una línea recta del plano.

□ $= \left\{\pi, \frac{-1}{3}, 4, -8, 2.71, \sqrt{2}...\right\}$

Número irracional: es un número decimal infinito no periódico. $\sqrt{2}$, π , etc…

Distancia entre dos números, dados dos números reales *a* y *b*, se llama distancia entre ellos a la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos *a* y *b*.

Distancia $(a,b) = |b - a|$

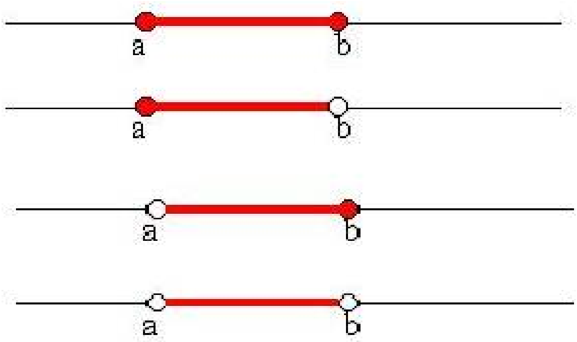
0.2 Subconjuntos de ℝ

Intervalo cerrado [a,b] al conjunto de los números reales *x*, **a≤ x ≤ b.**

Intervalo semicerrado [a,b) al conjunto de los números reales *x*, **a ≤ x < b**.

Intervalo semicerrado (a,b] al conjunto de los números reales *x*, **a < x ≤ b**.

Intervalo abierto (a,b) al conjunto de los números reales *x,* **a < x < b**.



Podemos decir que (a,b) = [a,b] – {a,b}

Todos los intervalos (a,b), (a,b], [a,b) y [a,b] tiene el mismo punto medio $\frac{a+b}{2}$ puesto que:

$$\left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{b-a}{2} = \left|b - \frac{a+b}{2}\right|$$

Entorno centrado de un punto *a*.

Dado un número real $\delta > 0$, se llama:

- Entorno abierto centrado en *a* y de radio δ al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.
- Entorno abierto centrado en *a* y de radio δ al intervalo $[a - \delta, a + \delta]$.
- Entorno reducido centrado en *a* y de radio δ al intervalo $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Otra forma de definirlo es:

$(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$

$[a-\delta, a+\delta] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \delta\}$

Se lee: conjunto de puntos ***x*** que están a distancia del punto a menor, menor o igual, que δ

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto, si para cualquier punto ***x*** de A existe un entorno centrado en ***x*** contenido en A. es decir para cada $\boldsymbol{x} \in A$ existe un $\delta > 0$ tal que $(\boldsymbol{x}-\delta, \boldsymbol{x}+\delta) \subset A$.

Del conjunto de los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ se dice que es una topología para $\mathbb{R}$, que es lo mismo que decir que cumplen las siguientes propiedades:

- El $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.
- La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Un conjunto C es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ si es el complementario de un conjunto abierto, es decir si existe A abierto tal que $C = \mathbb{R} - A$.

Los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ tienen las siguientes propiedades:

- El $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.
- La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

$A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto ***acotado superiormente*** si y sólo si existe una semirrecta $(-\infty,b]$ que lo contiene; $A \subset (-\infty,b]$. Del número ***b*** se dice que es una ***cota superior*** de A.

$A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto ***acotado inferiormente*** si y sólo si existe una semirrecta $[a,+\infty)$ que lo contiene; $A \subset [a,+\infty)$. Del número ***a*** se dice que es una ***cota inferior*** de A.

Cuando un conjunto A está acotado inferiormente y superiormente a la vez, se dice que el conjunto A es un conjunto acotado.

$A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto ***acotado*** si y sólo si existe un intervalo (a,b) que lo contiene. Es decir $A \subset (a,b)$.

0.3 Ecuación e inecuación polinómica

0.3.1 Ecuación de primer grado

Toda ecuación de primer grado en la incógnita x se puede escribir como $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Su solución es $x = \frac{-b}{a}$.

La solución de una ecuación de primer grado es un único número.

0.3.2 Inecuación de primer grado

Las soluciones para las inecuaciones de primer grado en la incógnita $\boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{a} > 0$, son:

Para $ax + b < 0$, su solución es $x < \frac{-b}{a}$. Es decir $\left(-\infty, \frac{-b}{a}\right)$.

Para $ax + b \leq 0$, su solución es $x \leq \frac{-b}{a}$. Es decir $\left(-\infty, \frac{-b}{a}\right]$.

Para $ax + b > 0$, su solución es $x > \frac{-b}{a}$. Es decir $\left(\frac{-b}{a}, +\infty\right)$.

Para $ax + b \geq 0$, su solución es $x \geq \frac{-b}{a}$. Es decir $\left[\frac{-b}{a}, +\infty\right)$.

La solución de una inecuación de primer grado es una semirecta.

0.3.3 Ecuación de segundo grado

Toda ecuación de segundo grado en la incógnita x se puede escribir como:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a \neq 0$$

Su solución depende del valor del discriminante $b^2 - 4ac$.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces no existe número real que verifique la ecuación.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces existen dos soluciones x_1 y x_2, de la ecuación:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además la ecuación se puede escribir como $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces existe una solución la ecuación: $x_1 = \frac{-b}{2a}$.

Además la ecuación se puede escribir como $a \cdot (x - x_1)^2 = 0$.

0.3.4 Inecuación de segundo grado

La solución de una inecuación de segundo grado es:

Suponiendo que $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones, $x_1 < x_2$, entonces:

Para $ax^2 + bx + c < 0$:

- Si a > 0, solución $x_1 < x < x_2$. Es decir (x_1, x_2).
- Si a < 0, solución $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Para $ax + bx + c \leq 0$, su

- Si a > 0, solución $x_1 \leq x \leq x_2$. Es decir $[x_1, x_2]$.

- Si a < 0, solución $(-\infty, x_1] \cup [x_2,+\infty)$.

Para $ax^2 + bx + c > 0$:

- Si a > 0, solución $(-\infty, x_1) \cup (x_2,+\infty)$.
- Si a < 0, solución $x_1 < x < x_2$. Es decir (x_1,x_2).

Para $ax^2 + bx + c \geq 0$:

- Si a > 0, solución $(-\infty, x_1] \cup [x_2,+\infty)$.
- Si a < 0, solución $x_1 \leq x \leq x_2$. Es decir $[x_1,x_2]$.

En el caso de que $x_1 = x_2$, entonces $[x_1,x_1] = \{x_1\}$. La solución de una inecuación de segundo grado es una unión de semirrectas o es un intervalo.

0.3.5 Ecuación de tercer grado y de grado superior a tres

0.3.6 Inecuación de tercer grado y de grado superior a tres

0.3.7 Sistemas de inecuaciones polinómicas

0.4 Ecuación e inecuación racional

0.4.1 Ecuación racional

0.4.2 Inecuación racional

0.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Propiedades de exponenciales	Propiedades de logaritmos
$a^0 = 1$, $a^1 = a$.	$\log_a 1 = 0$
$a^{\log_a t} = t$ con $t > 0$	$\log_a a = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\log_a (a^x) = x$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\log_a (y \cdot t) = \log_a y + \log_a t$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\log_a (y / t) = \log_a y - \log_a t$
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ con $n \in \mathbb{N}$	$\log_a (y^n) = n \cdot \log_a y$ con $n \in \mathbb{N}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ con $n \in \mathbb{N}$	$\log_a \left(\sqrt[n]{y}\right) = 1/n \log_a y$ con $n \in \mathbb{N}$
$\left(a^x\right)^p = a^{p \cdot x}$ con $p \in \mathbb{R}$	$\log_a (y^p) = p \cdot \log_a y$ con $p \in \mathbb{R}$

Cambio de logaritmo.

De la igualdad $a^{\log_a t} = t$, al tomar logaritmos neperianos, se tiene $\log_a t \cdot \ln a = \ln t$, es decir:

$$\log_a t = \frac{\ln t}{\ln a}$$

0.5.1 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Propiedades de exponenciales	Propiedades de logaritmos
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(a^n\right)^x = \left(a^x\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$	$\left(a^{-n}\right)^x = \dfrac{1}{\left(a^x\right)^n}$ con $n \in \mathbb{N}$
$\sqrt[n]{a^x} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^x$ con $n \in \mathbb{N}$	$\left(a^y\right)^x = \left(a^x\right)^y$

1 TEMA 1. Funciones elementales I

1.1 Concepto de función

Una función *f* definida desde un conjunto A, llamado *conjunto inicial* o *dominio* de la función, a un conjunto B, llamado *conjunto final* o rango de la función, es una manera o regla de asignar a cada elemento $a \in$ A un único elemento $b \in$ B, imagen de a, que llamaremos $f(a)$, y se representa:

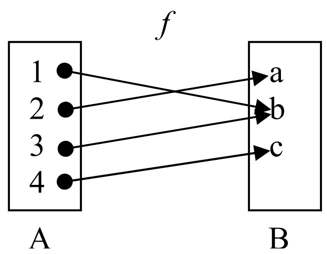
$$f: A \rightarrow B;\quad a \rightarrow f(a) = b$$

Una *función real de variable real* a toda función *f* de un subconjunto no vacío A de ℝ, llamado *conjunto inicial* o *dominio* de la función, en un conjunto B ⊆ ℝ, llamado *conjunto final* o rango de la función. Para representar una función utilizaremos la notación:

$$f: A \rightarrow B;\quad x \rightarrow f(x)$$

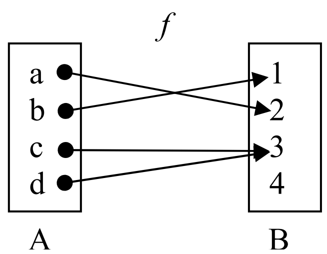
A la ***x*** le llamamos ***variable independiente*** y a la ***y*** o $f(x)$ ***variable dependiente***.

Sea $f: A \mapsto B$ una aplicación y $C \subset A$. Se denomina ***imagen*** del subconjunto C al conjunto de las imágenes de los elementos de C. la imagen de C se representa por $f(C)$



En esta aplicación la imagen del subconjunto $C = \{1,2,3\} \subset A$ es igual $f(C) = \{a,b\} \subset B$

Sea $f: A \mapsto B$ una aplicación y $D \subset B$. Se denomina ***imagen inversa*** del subconjunto D al subconjunto formado por las preimagenes de los elementos de D, se representa por $f^{-1}(D)$



En esta aplicación la imagen inversa del subconjunto $D = \{1,3\} \subset B$ es igual $f^{-1}(D) = \{b,c,d\} \subset A$

1.2 Gráfica de una función

Dada una función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se llama gráfica de f al conjunto de puntos del plano definido de la siguiente forma:

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Función constante

Las funciones constante son las funciones reales de variable real con expresión algebraica $f(x) = k$, siendo k un número real cualquiera. También lo podemos expresar como $y = k$.

La función $y = k$, es una recta paralela al eje de abscisas.

1.4 Función lineal

Las funciones lineales son de la forma f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$, donde "***a***" es un número real que se llama ***pendiente***.

Si $a = 0$, la recta es horizontal y corresponde a la gráfica de la función nula $f(x) = 0$.

Las gráficas de función lineal:

- Cortan al eje X en el punto (0,0) y pasan por el punto (1,a).
- Está inclinada hacia la derecha si a > 0.
- Está inclinada hacia la izquierda si a < 0.

1.5 Función afín

Las funciones afines son de la forma f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$

- ***Pendiente***: *a,* indica la inclinación.
- ***Ordenada en el origen***: *b*, nivel de la recta donde corta al eje de ordenadas.
- Si $b = 0$, entonces la función es afín.
- Si $a = 0$, entonces la función afín es la función constante que toma el valor b en todo punto x de $\mathbb{R}$ y su gráfica es una recta horizontal.
- Corta al eje X en el punto $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ y pasa por el punto $(1, a+b)$.
- Está inclinada hacia la derecha si a > 0.
- Está inclinada hacia la izquierda si a < 0.

1.6 Función cuadrática

Se llama *función cuadrática* aquella que tiene como ecuación: $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales conocidos con $a \neq 0$ y x es una cantidad desconocida que se denomina variable.

Las funciones del tipo $y = ax^2$, con a un número real, $a \neq 0$.

- Son parábolas, cuyo vértice es el origen de coordenadas.
- Cuando a > 0, la parábola está orientada hacia arriba, es ***convexa***.
- Cuando a < 0, la parábola está orientada hacia abajo, es ***cóncava***.
- Dominio: el conjunto de todos los números reales.
- Simetría respecto al eje Y. Funciones pares.
    - ♦ Cuando a > 0:
        - ▪ Imagen: los reales positivos y el cero.
        - ▪ Alcanzan el valor menor "mínimo" en el punto V = (0,0), llamado vértice de la parábola.
    - ♦ Cuando a < 0:
        - ▪ Imagen: los reales positivos y el cero.
        - ▪ Alcanzan el valor mayor "máximo" en el punto V = (0,0), llamado vértice de la parábola.

La parábola $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando verticalmente k unidades la parábola $y = x^2$.

- Si $k > 0$, la trasladamos hacia arriba.
- Si $k < 0$, la trasladamos hacia abajo.
- El vértice de la nueva parábola será V = (0, k) y su eje de simetría el eje Y.

La parábola $y = (x^2 - \mathrm{h})^2$ se obtiene trasladando horizontalmente h unidades la parábola $y = x^2$.

- Si $h > 0$, la trasladamos hacia la derecha.
- Si $h < 0$, la trasladamos hacia la izquierda.
- El vértice de la nueva parábola será V = (h, 0) y su eje de simetría el eje $\boldsymbol{x = h}$.

La ***función general de segundo grado*** es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales conocidos con $a \neq 0$.

- El vértice es: $x_v = -\left(\dfrac{b}{2a}\right)$, $y_v = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$
- El eje de simetría es paralelo al eje de ordenadas y:
    - ♦ Si $a > 0$, está orientado hacia arriba.
    - ♦ Si $a < 0$, está orientado hacia abajo.
- Dominio: el conjunto de todos los números reales.
- Los puntos cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte con el eje X. pueden ser dos, uno o ninguno, según el signo del discriminante de dicha ecuación.
- Corta al eje Y en el punto (0,c).
- Es simétrica respecto de la recta $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$, si $\boldsymbol{b} = 0$ la función es simétrica respecto al eje Y, se llama ***función par***.
- Si $a > 0$, se verifica que $Im(f) = [y_v, +\infty)$, alcanza su menor valor en el vértice (x_v, y_v).
- Si $a < 0$, se verifica que $Im(f) = [-\infty, y_v)$, alcanza su mayor valor en el vértice (x_v, y_v).

1.7 Propiedades de las funciones

Clasificaremos las funciones atendiendo a algunas propiedades notables.

1.7.1 Función positiva o negativa

Se dice que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***positiva*** cuando $f(x) \geq 0$, para todo $\boldsymbol{x} \in Domf(x)$.

Se dice que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***estrictamente positiva*** cuando $f(x) > 0$, para todo $\boldsymbol{x} \in Domf(x)$.

La gráfica de una función positiva queda siempre por encima del eje Ox de abscisas, semiplano superior.

Se dice que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***negativa*** cuando $f(x) \leq 0$, para todo $\boldsymbol{x} \in Domf(x)$.

Se dice que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***estrictamente negativa*** cuando $f(x)$ v 0, para todo $\boldsymbol{x} \in Domf(x)$.

1.7.2 Monotonía de una función: crecimiento y decrecimiento

Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es ***monótona creciente*** si cuando $\boldsymbol{x}$ aumenta dentro de un intervalo también aumenta $f(x)$. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es ***estrictamente monótona creciente*** si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es ***monótona decreciente*** si cuando $\boldsymbol{x}$ aumenta dentro de un intervalo entonces $f(x)$ disminuye. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es ***estrictamente monótona decreciente*** si $x_1 > x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

1.7.3 Extremos relaivos: máximos y mínimos.

Un entorno reducido de a es un intervalo (a – h, a + h) con h > 0 al que le hemos quitado al punto $x = a$, es decir (a – h, a) $\cup$ (a, a + h).

Una función $\boldsymbol{f}$ alcanza un ***máximo relativo*** en el punto de abscisa $\boldsymbol{a}$ si existe un entorno reducido de $\boldsymbol{a}$, de forma que $f(x) < f(a)$ para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de dicho entorno reducido.

Una función $\boldsymbol{f}$ alcanza un ***mínimo relativo*** en el punto de abscisa $\boldsymbol{a}$ si existe un entorno reducido de $\boldsymbol{a}$, de forma que $f(x) > f(b)$ para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de dicho entorno reducido.

1.7.4 Paridad de una función

Decimos que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***par*** cuando $f(x) = f(-x)$, para todo $\boldsymbol{x} \in Dom(f)$.

Las funciones $f(x) = x^m$, con $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, son funciones ***pares*** si y sólo si $\boldsymbol{m}$ es par.

Decimos que una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***impar*** cuando $f(x) = -f(-x)$, para todo $\boldsymbol{x} \in Dom(f)$.

Las funciones $f(x) = x^m$, con $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, son funciones ***impares*** si y sólo si $\boldsymbol{m}$ es par.

1.7.5 Acotación

La acotación nos dice si la gráfica queda por debajo o por encima de alguna recta paralela al eje de abscisas.

Una función f está ***acotada superiormente*** si existe un número real K tal que la imagen de cualquier punto x del dominio de f es siempre menor o igual que ese valor.

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mathrm{K},\ \forall x \in Dom\ (f)$$

Si K es una cota superior de f, cualquier otro número real M mayor que K es también una cota superior de la función. Si una función está acotada superiormente, tendrá infinitas cotas superiores.

Sea f una función acotada superiormente. A la menor de todas sus cotas superiores se le llama supremo de f y se expresa como $sup(f)$.

Si existe $x_0 \in Dom\ (f)$ tal que $f(x) = K$, siendo $K = sup(f)$, se dice que f tiene un *máximo absoluto* y este máximo absoluto es K.

Una función f está ***acotada inferiormente*** si existe un número real L tal que la imagen de cualquier punto x del dominio de f es siempre mayor o igual que ese valor.

$$\exists\, L \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mathrm{L},\ \forall x \in Dom\ (f)$$

Si L es una cota inferior de f, cualquier otro número real N mayor que L es también una cota inferior de la función. Si una función está acotada inferiormente, tendrá infinitas cotas inferiores.

Sea f una función acotada inferiormente. A la mayor de todas sus cotas inferiores se le llama ínfimo de f y se expresa como $inf(f)$.

Si existe $x_0 \in Dom\ (f)$ tal que $f(x) = L$, siendo $L = inf(f)$, se dice que f tiene un *mínimo absoluto* y este mínimo absoluto es L.

Una función se dice que está ***acotada*** cuando está acotada inferiormente y superiormente.

1.7.6 Periodicidad de una función

Si p es un número real positivo, una función f se dice que es periódica de periodo p cuando

$$f(x+p) = f(x),\ \forall x \in Dom\ (f)$$

1.8 Funciones polinómicas, racionales e irracionales

Las ***funciones polinómicas*** son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde a_n, a_{n-1}, …, a_0 son números reales que se llaman coeficientes del polinomio y ***n*** es el grado del polinomio.

- Las funciones *constantes* son de grado 0.
- Las funciones *lineales* son de grado 1.
- Las funciones *cuadráticas* son de grado 2.

Las ***características principales*** de este tipo de funciones son:

- $Dom\ (f) = \mathbb{R}$.
- Cortan al eje Y en el punto $(0, a_n)$.
- Cortan al eje X en, a lo sumo, n puntos, cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- No son periódicas. Salvo la función $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, son funciones continuas

Las ***funciones racionales*** son aquellas cuya expresión algebraica es un cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0.$$

Las características principales son:

- Dominio: todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador, para hallarlo resolvemos la ecuación $Q(x) = 0$ y excluir de $\mathbb{R}$ las raíces de dicha ecuación.
- Corte con el eje Y: el punto $(0, f(0))$.
- Corte con el eje X se resuelve la ecuación $P(x) = 0$, con $x \in Dom\ (f)$. las abscisas de los puntos son las soluciones de la ecuación.

Un caso particular de funciones racionales son las del tipo $y = \frac{k}{(x-a)^n}$.

Donde $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}$ son números reales, $\boldsymbol{k} \neq 0$, y $\boldsymbol{n}$ es un número natural.

Tienen las siguientes características:

- Si $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{k} > 0$.
  - El dominio es $\mathbb{R} - \{a\}$.
  - El recorrido son los reales positivos.
  - Es creciente para $x < a$ y decreciente para $x > a$.
  - Es una función simétrica respecto de la recta $x = a$.

- Si $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{k} < 0$.
  - El dominio es $\mathbb{R} - \{a\}$.
  - El recorrido son los reales negativos.
  - Es decreciente para $x < a$ y creciente para $x > a$.
  - Es una función simétrica respecto de la recta $x = a$.

- Si $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{k} > 0$.
  - El dominio son todos los reales menos $\boldsymbol{a}$ y el recorrido son los reales menos el cero.
  - Es decreciente en todo su dominio.
  - Es simétrica respecto al punto $(a,0)$.

- Si $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{k} < 0$.
  - El dominio son todos los reales menos $\boldsymbol{a}$ y el recorrido son los reales menos el cero.
  - Es creciente en todo su dominio.
  - Es simétrica respecto al punto $(a,0)$.

- En todos los casos no hay corte con el eje X y no son funciones acotadas ni periódicas.

Las ***funciones irracionales*** son aquellas cuya expresión algebraica presenta un radical: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ donde $g(x)$ es una función polinómica o racional.

Las ***características generales*** son:

- Si el índice del radical es par, el dominio son los valores para los que el radicando es positivo o nulo.
- Si el índice del radical es impar, el dominio es todo $\mathbb{R}$.
- La imagen es $[0,+\infty)$.

1.9 Funciones definidas a trozos

Una función ***definida a trozos*** es aquella cuyo dominio está dividido en intervalos disjuntos, de forma que en cada intervalo la función viene dada por expresiones matemáticas distintas.

Para dibujarlas se representan cada una de las partes de las que está compuesta teniendo en cuenta que sólo tiene validez en el intervalo en que están definidas.

1.10 Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales definidas en el mismo conjunto A, $A \subset \mathbb{R}$:

$$f: A \to \mathbb{R},\ x \to f(x). \quad g: A \to \mathbb{R},\ x \to g(x).$$

Se define la función suma como: $f + g$.

Se define la función resta como: $f - g$.

Se define la función producto como: $f \cdot g$.

Se define la función cociente como: f / g.

1.10.1 Función compuesta

Se define la composición de f con g, como la función $g \circ f$, que toma en los puntos del dominio de f el valor: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Llamaremos *función identidad* I a la función I: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to I(x) = x$.

Dada una función real diremos que tiene una función inversa f^{-1} cuando $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

2 TEMA 2. Funciones elementales II

2.1 La función potencia

Dado un número natural n, la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{n} = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, se llama *función potencia de exponente natural*.

Dado un número natural $n = 1,2,..$, la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{-x} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}$$

Para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, se llama *función potencia de exponente entero negativo*.

2.1.1 Propiedades del cálculo con potencias

- $(x \cdot z)^n = x^n \cdot z^n$, cualesquiera que sean $x,y \in \mathbb{R} - \{0\}$, $z \in \mathbb{Z}$
- $x^z \cdot x^p = x^{z+p}$ y $\frac{x^z}{x^p} = x^{z-p}$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, z y $p \in \mathbb{Z}$
- $\left(x^z\right)^p = x^{z \cdot p}$ con $p \in \mathbb{R}$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, z y $p \in \mathbb{Z}$
- En el caso que $x = 0$ habrá que estudiarlo aparte ya que no se puede dividir por 0 y si el exponente es negativo las funciones no están definidas en dicho punto.

2.1.2 Gráfica de la función potencia de exponente entero positivo

Si el exponente es positivo, tenemos:

- Si n es par es del tipo parábola.
- Si n es impar es una curva.

2.1.3 Gráfica de la función potencia de exponente entero negativo

Si el exponente es positivo, tenemos:

- Si n es par es una curva.
- Si n es impar es una curva.

Las potencias de exponente racional positivo son estrictamente crecientes en $(0,+\infty)$.

Las potencias de exponente racional negativo son estrictamente decrecientes en $(0,+\infty)$.

Las potencias de exponente racional tanto positivo como negativo no están acotadas superiormente.

Las potencias de exponente racional tanto positivo como negativo están acotadas inferiormente en $(0,+\infty)$ por ser positivas.

2.2 Función logaritmo neperiano

Se llama función logaritmo neperiano y se designa por lnx a la función definida en $\mathbb{R}^+$, con los valores en $\mathbb{R}$ y tienen las siguientes propiedades:

- Cualquiera que sean $x,y \in \mathbb{R}^+$, se verifica: $ln\,(x \cdot y) = ln\,x + ln\,y$.
- Cualquiera que sean $x,y \in \mathbb{R}^+$, se verifica: $ln\,(x\,/\,y) = ln\,x - ln\,y$.
- $ln\,e = 1$.
- $ln\,1 = 0$.
- $ln\,x = ln\,y$.
- $ln\,x$ es continua.

2.3 La función exponencial natural

La función $exp(x) = \ln^{-1}(x) = e^x$, definida de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, inversa de la función logaritmo neperiano, se denomina ***función exponencial natural***.

Las expresiones $exp(x) = \ln^{-1}(x) = e^x$, $lny = x$, son equivalentes.

Propiedades principales de la función exponencial e^x:

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
$e^{m\cdot x} = \left(e^x\right)^m$	$e^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{e^x}$
$e^0 = 1$	$e^1 = e$
$e^x = e^y$	e^x es continua

2.4 Otras funciones logarítmicas, exponenciales y potenciales.

2.4.1 Función logaritmo en base a

Se llama función logaritmo en base $a > 0$ y se designa por $log_a(x)$ a la función definida en $\mathbb{R}^+$, con valores en $\mathbb{R}$, con las siguientes propiedades

- Cualquiera que sean $x,y \in \mathbb{R}^+$, se verifica: $log_a(x \cdot y) = log_a\,x + log_a\,y$.
- Cualquiera que sean $x,y \in \mathbb{R}^+$, se verifica: $log_a\,(x\,/\,y) = log_a\,x - log_a\,y$.
- $log_a\,e = 1$.
- $log_a\,1 = 0$.
- $log_a\,x = log_a\,y$.
- $log_a\,x$ es continua.

Si $y = log_a\,x$ entonces $x = a^y$ y tomando logaritmos neperianos se tiene:

$Ln\,x = ln(a^y) = y\,ln_a = log_a\,x \cdot ln\,a$, deducimos:

$$\log_a x = \frac{ln\,x}{ln\,a}.\ (a \neq 1)$$

2.4.2 La función exponencial de base a

Sea $a > 0$ un número real positivo. La función que a cada número real x le asocia $e^{x \log a}$ se denomina función exponencial de base a y se designa por $exp_a(x) = a^x$.

Las propiedades principales de la función exponencial a^x son:

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
$a^{m\cdot x} = \left(a^x\right)^m$	$a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{a^x}$
$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^x = a^y$	a^x es continua

2.4.3 Función potencia de exponente real

Dado un número real arbitrario a, la función f: $(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$, para cada número real $x > 0$, se llama *función potencia de exponente a*.

2.5 Funciones trigonométricas

2.5.1 Función seno y función coseno

La *función seno*, $y = sen(x)$, es aquella que asocia a cada ángulo x su seno.

La *función seno* tiene un periodo de 2π.

La *función coseno*, $y = cos(x)$, es aquella que asocia a cada ángulo x su coseno.

La *función coseno* tiene un periodo de 2π.

2.5.2 Circunferencia unidad y razones trigonométricas

2.5.3 Función tangente y función cotangente

Las funciones *tangente* y *cotangente*, que se designan respectivamente por ***tg*** y ***ctg***, son aquellas definidas por

$f(x) = tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, para $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, con k un número entero.

$f(x) = cotg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$, para $x \neq k\pi$, con k un número entero.

Las funciones ***tg*** y ***ctg*** son periódicas de periodo π.

2.5.4 Función secante y función cosecante

Las funciones *secante* y *cosecante*, que se designan respectivamente por ***sec*** y ***cosec***, son aquellas definidas por

$f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$, para $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, con k un número entero.

$f(x) = \cos ec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$, para $x \neq k\pi$, con k un número entero.

Las funciones ***sec*** y ***cosec*** son periódicas de periodo 2π.

2.6 Funciones trigonométricas inversas

2.6.1 Función arco seno

La función y = *arcsen*(x) es aquella en la que y es el valor del ángulo, arco, comprendido entre $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cuyo seno es el número real x.

2.6.2 Función arco coseno

La función y = *arccos*(x) es aquella en la que y es el valor del ángulo, arco, comprendido entre $[0, \pi]$, cuyo coseno es el número real x.

2.6.3 Función arco tangente

La función y = *arctg*(x) es aquella en la que y es el valor del ángulo, arco, comprendido entre $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cuya tangente es el número real x.

3 TEMA 3. Límites de funciones. Continuidad

3.1 Límite de una función

Las funciones que vamos a estudiar son funciones reales de variable real, es decir que están definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y toman valores de $\mathbb{R}$.

El ***límite*** describe cómo se comporta una función cuando se aproxima a un determinado valor.

Un *límite* existe si el valor de los límites laterales en un punto es el mismo.

El *límite* de una función en un punto si existe, es único.

Decimos que una función f tiende hacia $\boldsymbol{L}$, o que tiene por límite $\boldsymbol{L}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende hacia $\boldsymbol{a}$ y se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Cuando para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que:

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Decimos que una función f tiende hacia $\boldsymbol{L}$, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende hacia $\boldsymbol{a}$ por la izquierda y se escribe:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Cuando para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < a - x < \delta$.

Decimos que una función f tiende hacia $\boldsymbol{L}$, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende hacia $\boldsymbol{a}$ por la derecha y se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Cuando para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < x - a < \delta$.

3.2 Cálculo de límites

Propiedades de los límites.

Si tenemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

- $\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot L$, para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to a} f(f+g)(x) = L + M$.
- $\lim_{x \to a} f(f-g)(x) = L - M$.
- $\lim_{x \to a} f(f \cdot g)(x) = L \cdot M$.
- $\lim_{x \to a} f\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$, cuando $M \neq 0$.
- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f\sqrt[n]{(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, y si n es par, entonces debe ocurrir que $f(x) \geq 0$ en un entorno del punto a.
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\log_b f(x)\right) = \log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) = \log_b(L)$, para todo $b \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$, supuesto que $f(x) > 0$ en un entorno del punto a.
- $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = b^L$, para todo $b \in \mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = L^M$, supuesto que $f(x) > 0$ en un entorno del punto a.
-

3.3 Límites infinitos y límites en el infinito

Ver los ejemplos de las páginas 134 a 137.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0<|x-a|<\delta$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0<|x-a|<\delta$.
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x <$ **s**.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < r$ siempre que $x < s$.
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > r$ siempre que $x < s$.
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x >$ **s**.
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < r$ siempre que $x > s$.
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > r$ siempre que $x > s$.

Los límites laterales de una función en un punto $a \in \mathbb{R}$ pueden ser infinitos.

1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0< a - x <\delta$.
2. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0< a - x <\delta$.
3. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ siempre que $0< x - a <\delta$.
4. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ cuando para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ siempre que $0< x - a <\delta$.

Se verifica:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

3.3.1 Propiedades para límites infinitos y en el infinito

Sean $a, L, M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ y suponemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$.

Expresiones determinadas.

$+\infty + b = +\infty$	$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$-\infty + b = -\infty$
$-\infty + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \cdot b = +\infty,\ b > 0$	$(+\infty) \cdot b = -\infty,\ b < 0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) \cdot b = -\infty,\ b > 0$	$(-\infty) \cdot b = +\infty,\ b < 0$
$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$a / +\infty = 0$
$a^{+\infty} = \infty$, si $a > 1$	$a^{+\infty} = 0$, si $0 < a < 1$	$a / -\infty = 0$
$a^{-\infty} = 0$, si $a > 1$	$a^{-\infty} = \infty$, si $0 < a < 1$	

Expresiones indeterminadas.

• $\frac{\infty}{\infty}$	• $\infty - \infty$
• $\frac{0}{0}$	• 1^{∞}
• $\frac{a}{0}\ (a \neq 0)$	• 0^{0}
• $0 \cdot \infty$	• ∞^{0}

3.4 Tratamiento de las indeterminaciones

3.4.1 Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Grado del numerador mayor que el grado el denominador

Ejemplo: $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n+4} = \lim \dfrac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \dfrac{2+0}{0+0} = \dfrac{2}{0} = \infty$

Siempre que el grado del numerador sea mayor que el grado del denominador será siempre ∞.

Grado del numerador igual que el grado el denominador

Ejemplo: $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n+5} = \lim \dfrac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim \dfrac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4n}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \dfrac{2}{3}$

Siempre en este caso el límite será el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.

Grado del numerador menor que el grado el denominador

Ejemplo: $\lim \dfrac{2n+1}{3n^2+5n} = \lim \dfrac{\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}} = \dfrac{0}{3} = 0$

Siempre que el grado del numerador sea mayor que el grado del denominador será siempre 0.

3.4.2 Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Cuando aparece una indeterminación al calcular el límite de cocientes de funciones polinómicas, estas se resuelven factorizando los polinomios numerador y denominador por la regla de Ruffini.

Aunque resulta mucho más útil utilizar la ***regla de l'Hôpital***, como se verá en el tema de derivadas. La regla dice que, se deriva el numerador y el denominador, ***por separado***; es decir: sean las funciones originales $f(x)/g(x)$, al aplicar la regla se obtendrá: $f'(x)/g'(x)$. Lo podemos aplicar en indeterminaciones del tipo 0/0 y ∞/∞, etc.

3.4.3 Indeterminaciones del tipo $\frac{a}{0}$

Este tipo de indeterminaciones con $a \neq 0$, no suele ser difícil de eliminar, siendo suficiente estudiar los límites laterales de los cocientes de funciones que los generan.

3.4.4 Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Se resuelven transformándola en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o una del tipo $\frac{0}{0}$.

3.4.5 Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Normalmente cuando aparecen este tipo de indeterminaciones multiplicamos numerador y denomidanor por su conjugado, de $(a - b)$, su conjugado es $(a + b)$.

El límite de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, cuando $x \to \infty$, es el número ***e***. $e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

3.4.6 Indeterminaciones del tipo 1^∞

Este tipo de indeterminaciones se resuelve convirtiendo la expresión de la función en otra donde intervenga el número *e*.

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Utilizaremos el número ***e*** en el cálculo de límite de expresiones $({x_n}^{y_n})$, cuando la base tiende a 1 y la sucesión y_n tiende a ∞ la fórmula es:

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = e^{\lim y_n (x_n - 1)}$$

3.5 Continuidad

Una función es continua en un intervalo cuando su gráfica en ese intervalo podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel.

- La función $f(x)$ tiene que estar definida.
- El valor de los límites laterales tiene que ser el mismo.
- Una función f es continua en el punto x_0 si se verifica $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se dice que una función f es *continua por la izquierda* en un punto a cuando: $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Se dice que una función f es *continua por la derecha* en un punto a cuando: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Se dice que una función f es continua en un *intervalo abierto* (a,b) cuando es continua en todo punto de dicho intervalo.

Se dice que una función f es continua en un *intervalo cerrado* $[a,b]$ cuando es continua en el *intervalo abierto* (a,b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

3.6 Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones continuas en un punto a. entonces las funciones $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son también continuas en a. Si además es $g(x) \neq 0$, para todo $x \in Dom(g)$, entonces la función f / g también es continua en a.

Si f es una función continua en a y g es una función continua en $f(a)$, entonces tenemos la función compuesta $g \circ f$ que es continua en a.

3.7 Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas en intervalos

Sean I un intervalo y f: I $\to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces el conjunto $f(\mathrm{I}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ es bien un intervalo o bien un punto.

Teorema de los valores intermedios. Sea f una función continua en $[a,b]$, si c es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = \mathrm{c}$.

Teorema de Bolzano. Si f es una función continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass. Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f tiene un máximo y un mínimo en $[a,b]$, es decir, existen puntos en c y d de $[a,b]$ tales que:

$$f(c) \geq f(x) \text{ y } f(d) \leq f(x), \text{ para todo } x \in [a,b]$$

3.8 Continuidad de la función inversa

Sea f una función continua y creciente en un intervalo I. entonces f(I) es un intervalo y la función inversa f^{-1} es también continua y creciente en f(I).

Sea f una función continua y decreciente en un intervalo I. entonces f(I) es un intervalo y la función inversa f^{-1} es también continua y decreciente en f(I).

4 TEMA 4. Funciones derivables

4.1 Tasa de variación media de una función

Nos da una idea de la rapidez con que crece o decrece la función en un intervalo.

La podemos definir como la función $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ al número t_m definido por

$$t_m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La tasa de variación media puede ser positiva, negativa o nula, dependiendo del valor de $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

4.2 Tasa de variación instantánea

Se llama tasa de variación instatanea de la función $f(x)$ en el punto x0 al límite de las tasas de varicaión media en los intervalos $[x_0, x_0 + h]$ cuando la amplitud h de estos intervalos tiende a cero y la representamos por t0, es decir:

$$t_0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La tasa de variación instantanea puede ser positiva, negativa o nula, dependiendo del valor de $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

4.3 Derivada de una función en un punto

Se dice que una función f es *derivable* en un punto a cuando existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dicho límite se designa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en a.

La función f es *derivable* en a si y solo si los ***límites laterales*** existen y son iguales, son las derivadas laterales por la izquierda y la derecha de f en a.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Toda función derivable en un punto x_0 es continua en x_0, el recíproco no tiene porque ser cierto.

Se dice que una función f es derivable en un intervalo abierto (a,b) cuando es derivable en todo punto de dicho intervalo.

4.4 Interpretación geométrica de la derivada

La ecuación de la secante que pasa por el punto (a,f(a)) y por otro punto arbitrario ($a + h$, $f(a + h)$),

$h \neq 0$, de la gráfica de es $y - f(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)$

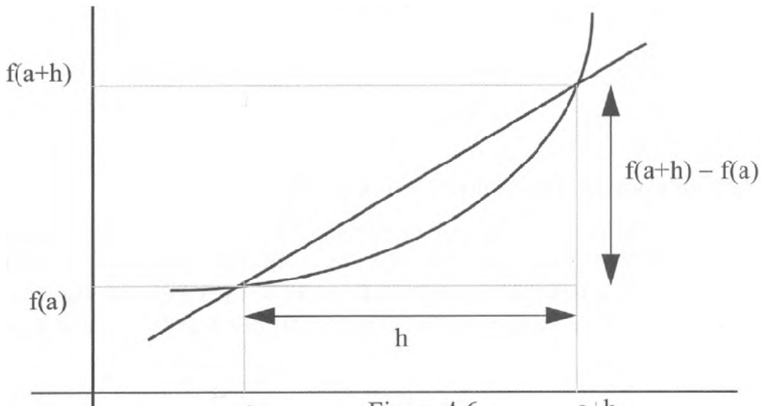


Figura 4.6

La tangente a la gráfica de f en el punto (a,$f(a)$) es la recta límite de las rectas secantes.

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$.

La ecuación de dicha recta tangente es $y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$ y además pasa por el punto $(x_0(f(x_0)))$.

4.5 Función derivada. Derivadas sucesivas

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en su dominio Dom(f). Se define la función $f\,'$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

A esta función se le denomina función derivada de la función f.

El dominio de derivabilidad de f está formado por todos los elementos del dominio de f en los cuales f es derivable.

4.5.1 Derivadas sucesivas

Llamamos derivada primera de una función $f(x)$ a $f\,'(x)$.

Llamamos derivada segunda de una función $f(x)$ a $f\,''(x)$. que es la derivada de la derivada primera.

4.6 Derivadas de las operaciones con funciones

El proceso del cálculo de la derivada de una función se denomina derivación.

Si f y g son derivables en a entonces $f + g$ y $f - g$ son también derivables en a y

Suma	$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
Resta	$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
Producto de un número real por una función	$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'(a)$
Producto	$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}$
Función compuesta	$(f \circ g)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$
Función inversa	$\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$

4.7 Derivadas de funciones elementales

	Simple	Compuesta
Función constante	D[cte] = 0	
Función identidad	D[x] = 1	
Función potencia	D[x^n] = $n \cdot x^{n-1}$	D[$f(x)^n$] = $n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
Función raíz cuadrada	$D\left[\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\left[\sqrt{f(x)}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f'(x)$
Función raíz *n-ésima*	$D\left[\sqrt[n]{x}\right] = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{\left[f(x)\right]^{n-1}}} \cdot f'(x)$
Función exponencial	$D\left[e^x\right] = e^x$	$D\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Función exponencial	$D\left[a^x\right] = a^x$	$D\left[a^{f(x)}\right] = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
Función logarítmica	$D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$	$D[\ln f(x)] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
Función logarítmica	$D[\log_a x] = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$D[\log_a f(x)] = \dfrac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$
Función seno	$D[sen(x)] = \cos x$	$D[senf(x)] = f'(x)\cos(f(x))$
Función coseno	$D[\cos(x)] = -senx$	$D[\cos f(x)] = -f'(x)sen(f(x))$
Función tangente	$D[tg(x)] = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$D[tg(f(x))] = \left(1 + \mathrm{tg}^2(f(x))\right) \cdot f'(x)$
Función tangente	$D[tg(x)] = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D[tg(f(x))] = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$

Función arco seno	$D\left[arcsen(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\left[arcsen(f(x))\right]=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
Función arco coseno	$D\left[\arccos(x)\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\left[arccos(f(x))\right]=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
Función arco tangente	$D\left[arctg(x)\right]=\frac{1}{1+x^2}$	$D\left[arctg(x)\right]=\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

4.8 Interpretación física de la derivada

La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada del espacio respecto al tiempo.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=e'(t)$$

Aceleración instantánea

La aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. $a=v'(t)$

Por tanto, la aceleración es la derivada segunda del espacio respecto al tiempo. $a=e''(t)$

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t)=3t^2-t+1$. El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

Hallar la ecuación de la velocidad. $v(t)=e'(t)=6t-1$

Hallar la velocidad en el instante t = 0. $v(0)=e'(t)=6\cdot 0-1=-1\ m/s$

Hallar la ecuación de la aceleración. $a(t)=v'(t)=e''(t)=6\ m/s^2$

4.9 Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites. Regla de L´Hôpital

Cuando nos encontramos con indeterminaciones de este tipo:

• $\frac{\infty}{\infty}$ • $\frac{0}{0}$ • $\frac{a}{0}\ (a\neq 0)$ • $0\cdot\infty$	• $\infty-\infty$ • 1^∞ • 0^0 • ∞^0

Podemos resolverlas aplicando la Regla de L´Hôpital.

4.9.1 Regla de L´Hôpital

Si dos funciones derivables tienen por límite cero o infinito, el límite del cociente es igual al límite del cociente de sus derivadas cuando este último existe.

Regla de L´Hôpital. Caso $\frac{0}{0}$.

Sean *f* y *g* dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
- En un cierto entorno reducido de a es $g(x) \neq 0$.
- Existen $f'(x)$ y $g'(x)$, que ni son cero ni son infinito a la vez, en un entorno de a.
- Existen el límite $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Regla de L´Hôpital. Caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Sean *f* y *g* dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$
- En un cierto entorno reducido de a es $g(x) \neq 0$.
- Existen $f'(x)$ y $g'(x)$, que ni son cero ni son infinito a la vez, en un entorno de a.
- Existen el límite $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4.9.2 Reducción de la indeterminación $0 \cdot \infty$

Se intenta resolver por la Regla de L´Hôpital y transformar el límite en uno de este tipo, $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.

En los casos en los que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ la indeterminación $0 \cdot \infty$ se puede transformar en alguna de la siguiente forma:

$\lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ y aparece una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ y aparece una del tipo $\frac{0}{0}$.

4.9.3 Reducción de la indeterminación $\infty - \infty$

La indeterminación se transforma en una del tipo $\frac{0}{0}$, dividiendo numerador y denominador por $f(x)\cdot g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$ y aparece una del tipo $\frac{0}{0}$.

Tratamiento de las indeterminaciones 1^{∞}; 0^{0}; ∞^{0}.

Estas indeterminaciones aparecen en el cálculo de límites de la forma: $L=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

La forma de resolverlos es tomando logarítmos neperianos:

$$L=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}\rightarrow \ln L=\ln\left(\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}\right)$$

Y por las propiedades de los logarítmos:

$$\ln L=\lim_{x\to a}\ln\left(\left[f(x)\right]^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left[g(x)\cdot\ln\left(\left[f(x)\right]\right)\right]$$

Por tanto, tenemos:

$$L=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}\left[g(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]\right]}$$

4.10 Teoremas de Rolle y del Valor Medio

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

5 TEMA 5. Estudio y representación de funciones

5.1 Máximos y mínimos

Si una función f es continua en un *intervalo cerrado* $[a,b]$, entonces tiene un valor *máximo absoluto* y un valor *mínimo absoluto* en $[a,b]$, es decir existen puntos c y d de $[a,b]$ tales que:

- $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.
- $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Si una función f definida en un intervalo abierto I tiene un máximo o mínimo en un punto $a \in$ I y f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.

Una función f puede tener un máximo o mínimo relativo en un punto a sin que sea $f'(a) = 0$.

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Los puntos de $[a,b]$ en los que f alcanza su máximo y su mínimo pertenecen a alguno de los tres conjuntos siguientes

- A = $\{ x \in (a,b): f'(x) = 0\}$
- B = {a,b}
- C = $\{ x \in (a,b)$: f no es derivable en $x\}$

5.2 Crecimiento y decrecimiento de una función

El creccimiento y decrecimiento de una función nos puede orientar sobre dónde se encuentran los valores máximos y mínimos de la misma, el signo de la derivada nos ayudará a estudiar el carácter de la variación.

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I:

- Los **intervalos de crecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' > 0$.
- Los **intervalos de decrecimiento** coinciden con los intervalos en que $f' < 0$.

Si f es una función derivable en x_0 y tiene en x_0 un máximo o mínimo relativo tiene que ser $f'(x_0) = 0$.

Para una función f derivable en todos los puntos de un intervalo (a,b), la resolución de la ecuación $f'(x_0) = 0$ con $x \in (a,b)$ proporciona todas las abscisas candidatas a ser máximos o mínimos relativos de f en (a,b).

5.3 Máximos y mínimos relativos

La derivada en un máximo o mínimo local o relativo vale 0, siendo condición necesaria del máximo o mínimo, si bien esta condición es necesaria no es suficiente, no obstante nos limita los posibles máximos o mínimos. Estos se encontrarán entre los valores que anulan la derivada $f'(x)=0$.

Si *f* tiene derivada f' que es derivable en x_0, se cumple $f'(x_0)=0$ y:

- $f''(x_0)>0$, entonces *f* tiene un mínimo relativo en x_0.
- $f''(x_0)<0$, entonces *f* tiene un máximo relativo en x_0.

Puede darse el caso que $f\,'(x) = 0$ para algún punto de su dominio y sin embargo *f* no presente extremos en dicho punto.

Los puntos donde se anula la derivada también se conocen como *puntos críticos*.

Sea *f* una función continua en un intervalo I y sean a,b,c puntos de I, tales que $a < c < b$ y c un punto crítico de *f*, es decir $f\,'(c) = 0$ o bien un punto singular de f, es decir $f\,'(c)$ no existe. Entonces:

- Si $f\,'(x) > 0$ para todo punto $x \in (a,c)$ y $f\,'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces $f\,(c)$ es un máximo relativo.
- Si $f\,'(x) < 0$ para todo punto $x \in (a,c)$ y $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces $f\,(c)$ es un mínimo relativo.
- Si $f\,'(x) > 0$ para todo punto $x \in (a,c)$ y $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces $f\,(c)$ ***no*** es un máximo relativo.
- Si $f\,'(x) < 0$ para todo punto $x \in (a,c)$ y $f\,'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces $f\,(c)$ ***no*** es un mínimo relativo.

Resumiendo:

- Si la derivada pasa de positiva a negativa, entonces el punto crítico corresponde a un máximo relativo.
- Si la derivada pasa de negativa a positiva, el punto crítico corresponde a un mínimo relativo.

5.4 Concavidad y convexidad

La función se denomina:

- **Convexa** en aquellos intervalos en que la pendiente de la tangente, $f'(x)$ crece.
- **Cóncava** cuando la pendiente de la tangente $f'(x)$ decrece.

Si *f* es una función con ***derivada segunda positiva*** en un intervalo abierto I, entonces *f* es ***convexa***.

Si *f* es una función con ***derivada segunda negativa*** en un intervalo abierto I, entonces *f* es ***cóncava***.

Los puntos en los que pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa se llaman **puntos de inflexión**.

5.5 Asíntotas

5.5.1 Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se presentan en aquellos puntos que anulan el denominador.

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de *f* a la izquierda de a cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de *f* a la derecha de a cuando $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

5.5.2 Asíntotas horizontales

Hay asíntota horizontal en las funciones racionales cuando el numerador tiene grado menor o igual al denominador, se calcula con $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de *f* cuando $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

5.5.3 Asíntotas oblicuas

Se presentan cuando el grado del numerador excede en una unidad del grado del denominador, son incompatibles con las asíntotas horizontales.

Son rectas del tipo $y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

La recta $y = ax + b$ con $a \neq 0$ es asíntota oblicua de *f* cuando

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \left[f(x) - ax - b\right] = 0$ o cuando $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left[f(x) - ax - b\right] = 0$

5.6 Esquema general para el análisis de funciones y construcción de su gráfica

1. Dominio de definición de la función.
2. Simetrías de la función.
3. Punto de discontinuidad de la función.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
5. Los máximos y mínimos relativos así como los valores máximos y mínimos absolutos de la función.
6. Los dominios de concavidad y convexidad de la gráfica y los puntos de inflexión.
7. Las asíntotas de la función.

Recordar que si para cada x se verifica que:

- Si $f(-x) = f(x)$, entonces f es simétrica respecto al eje de ordenadas o eje Y, f es par.
- Si $f(-x) = f(-x)$, entonces f es simétrica respecto al origen de coordenadas, f es impar.

Esquema de la Representación grafica de una función:

- Información obtenida de la función.
  - Dominio.
  - Simetría.
  - Continuidad.
  - Cortes con los ejes.
  - Asíntotas.
- Información obtenida de la primera derivada.
  - Extremos relativos.
  - Crecimiento y decrecimiento.
- Información obtenida de la segunda derivada.
  - Concavidad y convexidad.
  - Puntos de inflexión.

6 TEMA 6. La integral

6.1 Primitivas de una función

Calcular una primitiva de una función $f(x)$ es hallar una función derivable F(x) tal que F´(x) = $f(x)$.

Se dice que una función F(x) es una primitiva de otra función $f(x)$ en un inervalo [a,b] cuando F(x) es derivable en [a,b] y además F´(x) = $f(x)$ en dicho intervalo.

Dada una función $f(x)$ se quiere hallar una función F(x) con la condición de que F´(x) = $f(x)$ en un intervalo fijado I que puede ser cualquier tipo de intervalo, incñuyendo toda la recta real. A la función F(x) se la denomina primitiva de f.

6.2 Integral indefinida

Si F(x) es una primitiva de otra función $f(x)$, hemos visto que también lo es cualquier función de la forma F(x) + k, siendo k una constante, pues:

$$(F(x) + k)' = F'(x) = f(x).$$

El conjunto de todas las primitivas posibles de una función $f(x)$ se llama ***integral indefinida*** de $f(x)$. Se lee "***integral de f (x) diferencial de x***" y se escribe:

$$\int f(x)\,dx$$

Además, si F(x) es una primitiva de la función $f(x)$, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

6.3 Linealidad de la integral indefinida

Propiedad de linealidad

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int f(x)dx - \int g(x)\,dx$$

$\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx$, para todo a número reaL.

No es cierto que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales.

6.4 Integrales inmediatas

Dada una función derivable F(x), resulta que F(x) es una función primitiva de la función derivada F´(x), es decir:

$$F'(x)\,dx = F(x)$$

Una función elemental es una función que puede expresarse en forma de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o composición de funciones polinómicas, trigonométricas, trigonométricas inversas, logaritmos y exponenciales.

Tabla de integrales inmediatas

Función potencia	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + k$	
Función exponencial, a > 0	$\int e^x dx = e^x + k$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
Función logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$	
Función seno	$\int \cos(x)\,dx = sen(x) + k$	
Función coseno	$\int sen(x)\,dx = -\cos(x) + k$	
Función tangente	$\int \left(1+\mathrm{tg}^2(x)\right)dx = tg(x) + k$	
Función tangente	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg(x) + k$	
Función tangente	$\int \sec^2(x)\,dx = tg(x) + k$	
Función cotangente	$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} dx = -\mathrm{cotg}(x) + k$	
Función cotangente	$\int \left(1+cotg^2(x)\right)dx = -cotg(x) + k$	
Función arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + k$	
Función arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccos(x) + k$	
Función arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + k$	

6.5 Integración por sustitución o cambio de variable

Con este método se intenta que una integral que no es inmediata se convierta en inmediata y se pueda resolver.

Seguimos los siguientes pasos:

- Se sustituye $g(x)$ por una variable nueva $\boldsymbol{t}$.
- Se sustituye $g'(x)dx$ por $\boldsymbol{dt}$.
- Se reescribe la integral y se calcula $\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx=\int f(t)dt=F(t)+k$.
- Se deshace el cambio $F(t)+k=F\left(g(x)\right)+k$.

Si G(x) es una primitiva de g(x) y consideramos la composición G $\circ f(x)$ = G $(f(x))$, se tiene que:

$$G'\,(f(x)) = G'\,(f(x))\cdot f'(x)$$

Tabla de derivadas compuestas

Función potencia, con $a\neq -1$	$\int\left[f(x)\right]^{a}\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{\left[f(x)\right]^{a-1}}{a+1}+k$	
Función exponencial, $a > 0$	$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=\ e^{f(x)}+k$	$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}+k$
Función logarítmica	$\int\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=\ln\left\|f(x)\right\|+k$	
Función seno	$\int\cos\left(f(x)\right)\cdot f'(x)\,dx=sen\left(f(x)\right)+k$	
Función coseno	$\int sen\left(f(x)\right)\cdot f'(x)\,dx=-\cos\left(f(x)\right)+k$	
Función tangente	$\int\left(1+\mathrm{tg}^2\left(f(x)\right)\right)\cdot f'(x)\,dx=tg\left(f(x)\right)+k$	
Función tangente	$\int\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx=tg\left(f(x)\right)+k$	
Función tangente	$\int\sec^2\left(f(x)\right)\cdot f'(x)\,dx=tg\left(f(x)\right)+k$	
Función cotangente	$\int\dfrac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2\left(f(x)\right)}dx=-\mathrm{cotg}\left(f(x)\right)+k$	
Función cotangente	$\int\left(1+cotg^2\left(f(x)\right)\right)\cdot f'(x)\,dx=-cotg\left(f(x)\right)+k$	
Función arco seno	$\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}}dx=arcsen\left(f(x)\right)+k$	
Función arco coseno	$\int\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}}dx=arccos\left(f(x)\right)+k$	
Función arco tangente	$\int\dfrac{f'(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}dx=arctg\left(f(x)\right)+k$	

6.6 Integración por partes

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$
$$u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$
$$\int u\cdot v'=\int (u\cdot v)'-\int u'\cdot v$$
$$\int u\cdot v'=(u\cdot v)-\int u'\cdot v$$

Ejemplo: $\int xe^x$

$$u=x\rightarrow u'=1$$
$$v=e^x\leftarrow v'=e^x$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx=xe^x-\int 1\cdot e^x=xe^x-e^x=e^x\cdot(x-1)+k$$

Ejemplo: $\int x\cos xdx$

$$u=x\rightarrow u'=1$$
$$v=senx\leftarrow v'=\cos x$$

$$\int x\cos xdx=xsenx-\int 1\cdot senx=xsenx+\cos x+k$$

Ejemplo: $\int (3+4x)\cdot e^x$

$$u=(3+4x)\rightarrow u'=4$$
$$v=e^x\leftarrow v'=e^x$$

$$\int (3+4x)\cdot e^x=(3+4x)\cdot e^x-\int 4\cdot e^x=(3+4x)\cdot e^x-4\cdot e^x=e^x(4x-1)+k$$

6.7 Primitivas de las funciones racionales

Una función racional es una función de la forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas y $Q(x) \neq 0$.

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$ y llamamos $p(x)$ y $R(x)$ al cociente y al resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$, se tiene $P(x) = p(x)\ Q(x) + R(x)$, y por tanto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

y el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Por lo tanto: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int p(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$

La integral de $\int p(x)dx$ es inmediata.

El problema se reduce a calcular la integral $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$

En la que el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, es decir, fracción irreducible.

Estas integrales se resuelven descomponiendo la fracción integrando $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simple del tipo:

$$\frac{A}{(x-a)^n}\text{, con } n \in \mathrm{N}\text{, y } \frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^n}\text{, con } n \in \mathrm{N} \text{ y } b^2-c<0$$

Por lo tanto tenemos que calcular las integrales:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx \text{ y } \int\frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^n}dx$$

Vamos a ver dos tipos:

Tipo I: integrales del tipo $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$, son integrales inmediatas del tipo *logaritmo*:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\cdot\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\ln|x-a|+k$$

Tipo II: integrales del tipo $\int\frac{A}{(x^2+1)}dx$, son integrales inmediatas del tipo *arco tangente*:

$$\int\frac{A}{(x^2+1)}dx=A\cdot\int\frac{A}{(x^2+1)}dx=A\cdot arctg(x)+k$$

Ejemplos de funciones racionales

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1º Mirar si es del tipo: $\int \frac{u'}{u}$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} = \log(x^2+1)+k$$

Recordemos que toda función racional se podía descomponer en fracciones simples. Si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, primeramente efectuamos la división

$$\int \frac{1}{x^2-1} \qquad \begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x=\pm 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+1 \\ x-1 \end{array}$$

$$(x^2-1)=(x-1)\cdot(x+1)$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$A(x+1)+B(x-1)=1$$

$$x=1,\ 2A=1 \to A=\frac{1}{2}$$

$$x=-1,\ \text{-}2B=1 \to B=\frac{-1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}=\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\int \frac{\frac{-1}{2}}{x+1}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+1)+k$$

Cuando las raíces del denominador sean raíces reales distintas, entontes las integrales serán log.

Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{19x+31}{x^2+5x+6} \qquad x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$$

$$\frac{19x+31}{x^2+5x+6}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)\cdot(x+3)}$$

$$A(x+3)+B(x+2)=19x+31$$

$$x=-3, \to -B=19x+31 \to B=26$$

$$x=-2, \to A=19x+31 \to A=-7$$

$$\int \frac{19x+31}{x^2+5x+6}=\int \frac{26}{(x+3)}-\int \frac{7}{(x+2)}=26\log(x+3)-7\log(x+2)+k$$

6.8 Primitivas de algunas funciones trigonométricas

Potencias impares de *sen x* o *cos x*

El seno y el coseno están relacionados mediante la fórmula:

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

Si *n* es impar, entonces se pueden escribir:

$sen^n x$ como: $sen\ x \cdot (1 - \cos 2x)^{n\text{-}2}$

$cos^n x$ como: $\cos\ x \cdot (1 - sen 2x)^{n\text{-}2}$

Resolver la integral $\int sen^3 x dx$

$$\int sen^3 x dx = \int sen^2 x \cdot senx dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot senx dx = \int \left(senx - \cos^2 x \cdot senx dx\right) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

Resolver la integral $\int \cos^3 x dx$

$$\int cos^3 x dx = \int cos^2 x \cdot cosx dx = \int \left(1 - sen^2 x\right) \cdot cosx dx = \int \left(cosx - sen^2 x \cdot cosx dx\right) =$$

$$\int \cos x dx - \int sen^2 x \cos x dx = \int \cos x dx - \frac{1}{3}\int 3 sen^2 x \cos x dx = senx - \frac{1}{3} sen^3 x + k$$

Resolver la integral $\int sen^5 x dx$

$$\int sen^5 x dx = \int cos^4 x \cdot cosx dx = \int \left(1 - sen^2 x\right) \cdot cosx dx =$$

$$\int cosx dx - 2\int sen^2 x \cdot cosx dx + \int sen^4 x \cdot cosx dx = senx - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + k$$

6.9 Método de exhaución para el cálculo de áreas

Una partición de un intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3 ... x_n\}$ tales que $a=x_0< x_1< x_2< x_3<... <x_n = b$.

Los subintervalos abiertos de $[a,b]$ que determina la partición P, $(x_0, x_1),(x_1, x_2),...,(x_{n-1}, x_n)$ se denominan subintervalos de la partición P.

Una función s: $[a,b] \to \mathbb{R}$ es escalonada cuando se puede encontrar una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que s es constante en cada uno de los subintervalos abiertos de la partición P.

Sea s: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada constante en cada uno de los subintervalos de la partición $P = \{ a = x_0< x_1< x_2< x_3<... <x_n = b \}$ y que toma el valor c_i en el subintervalo (x_{i-1}, x_i), entonces, Área $= (x_1 - x_0)|c_1| + (x_2 - x_1)|c_2| +...+(x_n - x_{n-1})|c_n|$.

Integral definida de una función escalonada.

Sea s: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada constante en cada uno de los subintervalos de la partición $P = \{ a = x_0< x_1< x_2< x_3<... <x_n = b \}$ y que toma el valor c_i en el subintervalo (x_{i-1}, x_i), entonces se llama *integral definida de la función* $s(x)$ en $[a,b]$ al número real

$$c_1 \cdot (x_1 - x_0) + c_2 \cdot(x_2 - x_1) +...+ c_n \cdot (x_n - x_{n-1})$$

y se representa por $\int_a^b s(x)dx$.

Es decir $\int_a^b s(x)dx = c_1 \cdot (x_1 - x_0) + c_2 \cdot (x_2 - x_1) + ... + c_n \cdot (x_n - x_{n-1})$

Los valores c_i que toma la función escalonada pueden ser positivos o negativos. Si todos los c_i son no negativos entonces Área de $\int_a^b s(x)dx$ son iguales. El resto de casos no.

Concretamente Área = $\int_a^b |s(x)|dx$ y resulta que $\left|\int_a^b s(x)dx\right| \le \int_a^b |s(x)|dx$.

Propiedades de la integral. Dadas dos funciones escalonadas $s(x)$, $t(x)$ en $[a,b]$ y k un número real arbitrario, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b (s(x)+t(x)) = \int_a^b s(x) + \int_a^b t(x)$
2. $\int_a^b k \cdot s(x) = k \cdot \int_a^b s(x)$
3. Si $a < c < b \to \int_a^b s(x) = \int_a^c s(x) + \int_c^b s(x)$
4. Si $s(x) \le t(x)$, para todo $x \in [a,b] \to \int_a^b s(x) \le \int_a^b t(x)$
5. Si $s(x) \ge 0$, para todo $x \in [a,b] \to \int_a^b s(x) \ge 0$

Convenio notacional.

$\int_a^b s(x) = -\int_b^a s(x)$, $\qquad \int_a^a s(x) = 0$

6.10 La integral de Riemann

Una función acotada f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que es integrable en $[a,b]$ cuando existe un único número real ***i*** tal que:

$$\int_a^b s(x) \leq i \leq \int_a^b t(x)$$

Para todo par de funciones escalonadas $s(x)$ y $t(x)$ tales que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ en este caso, dicho número real ***i*** se llama integral definida en $[a,b]$ y se designa por:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ o también por } \int_a^b f\,.$$

En esta definición aparece el intervalo $[a,b]$, por tanto $a < b$.

Extendemos en convenio notacional $\int_b^a f(x) = -\int_a^b f(x)$, y $\int_a^a f(x) = 0$

Destacamos dos resultados importantes de la integral de Rimann:

Toda función continua en un intervalo $[a,b]$ es integrable en dicho intervalo.

Condición de integrabilidad Riemann.

Una función f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen dos funciones escalonadas s y t tales que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y

$$\int_a^b t(x) - \int_a^b s(x) < \varepsilon$$

Las propiedades de la integral para las funciones escalonadas son válidas para la integral de las funciones integrable.

Propiedades de la integral. Dadas dos funciones escalonadas $s(x)$, $t(x)$ en $[a,b]$ y k un número real arbitrario, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$
2. $\int_a^b k \cdot f(x) = k \cdot \int_a^b f(x)$
3. Si $a < c < b \to \int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$
4. Si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b] \to \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$
5. Si $s(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b] \to \int_a^b f(x) \geq 0$

Resultados importantes del cálculo integral.

Teorema del valor medio.

Si *f* una función continua en el intervalo cerrado [*a*,*b*], entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$$

Primer teorema fundamental del cálculo.

Si *f* una función integrable en [*a*,*b*] y sea F la función definida, para cada $x \in [a,b]$, por

$$F(x)\int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Si f es continua en un punto $x \in [a,b]$ entonces F es derivable en *x* y además

$$F'(x) = f(x).$$

Segundo teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow).

Sea *f* una función continua en [*a*,*b*] y sea *g* una función primitiva de *f* en [*a*,*b*], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)\,.$$

Fórmula de integración por partes.

Si *f* y *g* son funciones con primera derivada continua entonces

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \big[f(x)\cdot g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Teorema del cambio de variable.

Sea *f* una función continua y *g* una función con primera derivada continua, entonces:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

6.11 Área del recinto limitado por una función en [*a*,*b*]

Mediante la integral se pueden calcular las áreas de muchos recintos planos limitados por curvas.

Sea f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se considera la región del plano delimitada por la gráfica de la función f, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, entonces:

$$\acute{A}rea = \int_a^b |f(x)| dx$$

Elementos a tener en cuenta cuando se calcula el área limitada por una función:

1. Representar la gráfica de la función.
2. Delimitar el recinto cuya área queremos calcular.
3. Estudiar el signo de la función f en el intervalo correspondiente.
4. Utilizar, en el caso de que exista, la simetría de la función.

6.12 Área del recinto limitado por las gráficas de dos funciones

También podemos calcular el área limitada por dos curvas.

Sean las funciones f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ y g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se considera la región dl plano delimitada por las gráficas de las funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, entonces:

$$\acute{A}rea = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Contenido