ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS

VOLUMEN I

Centro Asociado Palma de Mallorca

Tutor: Antonio Rivero Cuesta

0 PRELIMINARES. NÚMEROS Y CONJUNTOS

0.1 P-1 Números enteros.

Llamamos diferencia $a - b$ de estos dos enteros, a y b, a otro entero d que satisface la igualdad $a = b + d$.

Si $a \neq 0$ y $b = a \cdot q$ para algún número entero q, diremos que a divide a b, y se escribe a|b.

Criterios de divisibilidad

Un número es divisible por **2,** *si termina en cero o cifra par*.
Un número es divisible por **3,** *si la suma de sus dígitos nos da múltiplo de 3.*
Un número es divisible por **5,** *si termina en cero o cinco.*

El **valor absoluto** o **módulo** de un número entero es su valor numérico sin tener en cuenta su *signo*, sea este positivo (+) o negativo (-).

División. Si a y b son dos números enteros con $b \neq 0$, existen q y r enteros tales que $a = b \cdot q + r$, donde $0 \leq r < |b|$. Además q y r son únicos. A los números a, b, q y r se les llama dividendo, divisor, cociente y resto.

Un número **natural *c*** es **divisible** por otro ***a*** cuando **la división es exacta**. El cociente es otro número natural y el resto de la división es cero.

a divide a ***c***
a es un divisor de ***c***
c es múltiplo ***a***

El **máximo común divisor** (abreviado ***mcd***) de dos o más números es el mayor número que los divide sin dejar resto.

Máximo común divisor. Comunes al menor exponente**.**

El **mínimo común múltiplo** (***mcm***) de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos.

Mínimo común múltiplo. Comunes y no comunes al mayor exponente.

Un ***número primo*** es un número natural mayor que 1, que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1

Un ***número compuesto*** tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo.

Factorización, sean a, b, c números naturales si $c = a \cdot b$ se denomina factorización en factores de c.

Descomposición en factores primos.

Los números compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.

La descomposición de un número es muy útil pues ayuda a poder calcular el máximo común divisor o mínimo común múltiplo de varios números.

0.2 P-2 Números racionales.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

Fracción

$$\frac{a}{b} \quad \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

Fracciones equivalentes.

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Reducir dos o más fracciones a común denominador es hallar otras fracciones equivalentes que tengan todas ellas el mismo denominador.

Operaciones fracciones.

Igual denominador

Suma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Resta

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Distinto denominador

Suma y resta $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$

Producto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

División $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

La expresión decimal de un número racional es la forma decimal que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

0.3 P-3 Números irracionales y números reales.

Número irracional: es un número decimal infinito no periódico. $\sqrt{2}$, π , etc.

0.4 P-4 Desigualdades y valor absoluto de un número real.

Dado un número real *a*, se llama valor absoluto de *a*, al mismo número si es positivo o cero, o a su opuesto si *a* es negativo. Es decir:

$|a| = a$, si $a \geq 0$

$|a| = a$, si $a \leq 0$

0.5 P-5 Potencias de números reales.

Si *a* es un número real y *n* es un número natural no nulo el producto $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . a}_{(n\ veces)}$ se representa por a^n y se denomina potencia de base *a* y exponente *n*, o *a* elevado a *n*.

Si $n = 0$ entonces $a^0 = 1$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Dado un número natural n no nulo y un número real positivo a, siempre existe un número real positivo b tal que $b^n = a$.

Se dice que b es la raíz *n-esima* de a y se escribe $b = \sqrt[n]{a}$ o $b = a^{\frac{1}{n}}$

Potencia con exponente fraccionado.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

0.6 P-6 Ecuaciones e inecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones.

Ecuación, es toda igualdad que relaciona números con letras. Las letras se denominan incógnitas y son las que debemos hallar.

Plantear, traducir las condiciones literales a símbolos matemáticos.

Resolver, hallar el valor de las incógnitas.

Ecuaciones de una incógnita.

Tenemos que hallar números tales que al reemplazar las incógnitas se cumple la igualdad de los dos miembros.

Ecuaciones con más de una incógnita.

La solución son tantos números como incógnitas.

Sistemas de ecuaciones.

La solución del sistema son números que son solución de todas las ecuaciones

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Si *sumamos o restamos* a ambos miembros de una ecuación un mismo número se obtiene una equivalente.

Si *multiplicamos o dividimos* a ambos miembros de una ecuación un mismo número distinto de cero se obtiene una equivalente.

Podemos pasar cualquier término de una ecuación de un miembro a otro sin más que cambiarle el signo.

Si a y b son dos números reales, una ecuación lineal con una incógnita *x* de la forma $ax=b$ está en **forma normal**.

El número *a* es el **coeficiente** de la incógnita.

El número *b* se denomina **término independiente**.

Dada la ecuación $ax=b$, donde *a* y *b* son números reales y *x* es la incógnita se cumple:

- Si $a\neq 0$ la ecuación tiene una única solución $x=\frac{b}{a}$.
- Si $a=0$ hay dos casos:
  - Si $b=0$ la ecuación tiene infinitas soluciones ya que $0\cdot x=0$.
  - Si $b\neq 0$ no hay solución ya que no se puede cumplir $0\cdot x=b$.

0.7 P-7 Ecuaciones de segundo grado.

Una expresión como esta $ax^2+bx+c=0$, donde *a*, *b* y *c* son números reales conocidos con $a\neq 0$ y *x* es una cantidad desconocida que se denomina variable.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado se hallan con esta fórmula: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si $b^2-4ac>0 \longrightarrow$2 Soluciones

Si $b^2-4ac=0 \longrightarrow$1 Solución $\qquad x=\frac{-b}{2a}$

Si $b\quad -4ac<0 \longrightarrow$No tiene

Si la ecuación es de la forma: $ax^2+c=0$ con $a\neq 0$, tiene dos soluciones: $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Una expresión como esta $ax^4 + bx^2 + c = 0$, es una ***ecuación bicuadrada***, para resolverla utilizamos el algoritmo de la ecuación de segundo grado.

0.8 P-8 Definiciones de conjunto y subconjunto.

Los **conjuntos** se representan con letras mayúsculas, A, B,C ,…

Los **elementos** se representas con minúsculas, a, b, c, x, y, z.

Relación de pertenencia:

- El elemento *a* pertenece al conjunto X, $a \in X$
- El elemento *a* no pertenece al conjunto Z, $a \notin Z$

Formas de definir un conjunto:

- Enumeración: enumeramos todos y cada uno de los elementos.
- Descripción: definimos alguna característica común a todos los elementos.

  Conjunto definidos por ***extensión***:

  S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

  V = {a, e, i, o, u}

  Conjunto definidos por ***compresión***:

  S = {días de la semana}

  V = {vocales del español}

Por ***compresión*** podemos definir de la siguiente manera los conjuntos:

$$V = \left\{ x \in A \middle| x \text{ es vocal} \right\}$$

V es el conjunto de los elementos *x* que pertenecen al conjunto de las letras del alfabeto español *A*, tales que *x* es una vocal.

Relación de inclusión:

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está incluido en B y se escribe $A \subset B$ cuando todos los elementos de A pertenecen a B.

Si A está contenido en B se dice que A es un subconjunto de B o que A es una parte de B.

Propiedades de la inclusión de conjuntos.

- **Reflexiva:** todo conjunto A está contenido en sí mismo.
  $A \subset A$.

- **Transitiva:** Si un conjunto A está contenido en otro B, y B está contenido en otro conjunto C, entonces A está contenido en C.
  Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces son iguales $A = B$.

Conjunto universal, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos que se analizan en un determinado contexto y se representa por *U*.

Conjunto vacío es un conjunto que no tiene elementos, se representa por $\varnothing$.

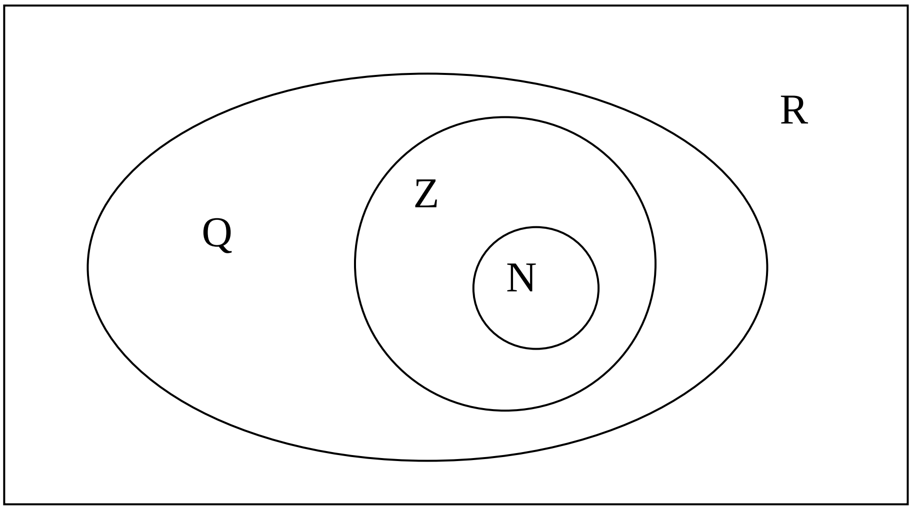
Cualquiera que sea el conjunto A se cumple $\varnothing \subset A$.

El **conjunto de las partes** de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Se representa por $P(A)$.

Si el conjunto A tiene *n* elementos, el conjunto de las partes de A tiene 2^n elementos.

DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados diagramas de Venn. El conjunto universal lo representamos por un rectángulo y los conjuntos por círculos dentro del conjunto universal.



0.9 P-9 Operaciones con conjuntos.

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los comunes a ambos conjuntos, se representa por $A \cap B$.

Dos **conjuntos son disjuntos** si no tienen elementos comunes, $A \cap B = \varnothing$.

La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los que pertenecen a alguno de los conjuntos, se representa por $A \cup B$.

El **conjunto complementario** de A está formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A, se representa por A^C.

La **diferencia** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, se representa por $A - B$.

La diferencia de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de A con el complementario de B, se representa por $A - B = A \cap B^C$.

Cuando $A - B = A$ o $B - A = B$ entonces $A \cap B = \varnothing$.

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap U = A$ $A \cap A = A$ $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B$ Si $B \subset A$ entonces $A \cap B = B$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$ $A \cup A = A$ $A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $A \subset A \cup B \quad B \subset A \cup B$ Si $B \subset A$ entonces $A \cup B = A$ $\varnothing^C = U$ $U^C = \varnothing$	$\left(A^C\right)^C = A$ $A \cap A^C = \varnothing$ $A \cup A^C = U$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $A \cup B = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)$ $= (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$ $A \cup B \cup C = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap B \cap C^C\right) \cup \left(A \cap B^C \cap C\right)$ $\cup \left(A^C \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap B^C \cap C^C\right) \cup \left(A^C \cap B \cap C^C\right)$ $\cup \left(A^C \cap B^C \cap C\right)$

Dados dos conjunto A y B, los pares ordenados de la forma (x,y) con $x \in$ A e $y \in$ B forman un tercer conjunto que se designa por A x B y se denomina ***producto cartesiano*** de A por B.

1 TEMA 1. Estadística y probabilidad

1.1 Estadística descriptiva.

La **estadística** es la ciencia que estudia mediante métodos cuantitativos, características de las poblaciones obtenidas como síntesis de la observación de unidades estadísticas.

Población, conjunto de seres u objetos acerca de los que se desea obtener información.

Muestra, subconjunto de individuos que son observados para obtener información sobre el total de la población a que pertenecen.

Individuo, cada uno de los elementos de los miembros de la población.

Variable estadística, característica observada en el estudio estadístico de una muestra o de una población.

La **frecuencia absoluta** de una modalidad o valor de la variable es el número de observaciones que presentan esa modalidad o valor.

La **suma de frecuencias absolutas** $F_1 + F_2 + ... + F_k = N$

La **frecuencia relativa** de la modalidad o valor x_i es la proporción de observaciones que presentan el valor x_i, se representa por $f_i = \frac{F_i}{N}$.

La **suma de las frecuencias relativas** de todas las modalidades o valores es igual a 1.

Parámetros estadísticos de centralización.

La ***Moda*** de una población, o muestra, es el valor x_i de mayor frecuencia absoluta n_i observado en la población.

La ***Mediana*** de la población, o muestra es el valor x_i tal que la suma de las frecuencias de los valores desde x_1 hasta él, y de él hasta x_k es la mitad del tamaño N de la población.

La **media aritmética** es igual a la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$$

La **media aritmética** de una distribución de frecuencias absolutas.

$$\overline{x} = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + ... + x_nF_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iF_i}{N}$$

La **media aritmética** de una distribución de frecuencias relativas.

$$\overline{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

Parámetros estadísticos de dispersión.

La desviación Media de la población, o muestra, es: $DM = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left|x_i - \overline{x}\right| \cdot n_i$

La **varianza** es la media aritmética de los cuadrados de sus desviaciones respecto de la media, se representa por: $s^2 = \frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + \left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza, se reprenda por:

$$s^2 = \sqrt{\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + \left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$$

Varianza de una distribución de frecuencias absolutas:

$$s^2 = \frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2 F_1 + \left(x_2-\overline{x}\right)^2 F_2 + \ldots + \left(x_n-\overline{x}\right)^2 F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 F_i$$

Varianza de una distribución de frecuencias relativas:

$$s^2 = \left(x_1-\overline{x}\right)^2 f_1 + \left(x_2-\overline{x}\right)^2 f_2 + \ldots + \left(x_n-\overline{x}\right)^2 f_n = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 f_i$$

La **varianza** es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media, se representa por: $s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2$

Coeficiente de variación al cociente entre la desviación típica y la media, suele expresarse en forma de porcentaje. $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$

1.2 Probabilidad.

Suceso elemental, cada uno de los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio. Se representa como un conjunto de un único elemento.

Un **espacio muestral** es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio y se designa por Ω.

Un **suceso** es un fenómeno aleatorio que podemos decir si ha ocurrido o no. Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Una probabilidad sobre un espacio de posibilidades Ω es una función que a cada subconjunto A de Ω le asocia un número *P(S)*, esta función cumple las cuatro condiciones siguientes:

1. $0 \le P(S) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Si A es un suceso, $P\left(A^c\right) = 1 - P(A)$.

Espacio muestral equiprobable. El espacio E = {$x_1,\ldots,x_n$} constituido por |E| = *n* sucesos elementales se dice que es un espacio muestral de *sucesos elementales equiprobables* si la probabilidad de cada suceso elemental es la misma. Además en este caso,

$$P\left(\{x_i\}\right)=\frac{1}{|E|}=\frac{1}{n} \quad \text{para cada } i = 1,\ldots,n.$$

Ley de los grandes números: Al repetir un experimento aleatorio *n* veces en idénticas condiciones físicas, la frecuencia relativa f_n (S), de aparición de un suceso elemental S, se aproxima a la probabilidad P(S) del suceso cada vez más al incrementar el número de veces *n* que se realiza el experimento.

Regla de Laplace.

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

1.3 Probabilidad condicionada.

La probabilidad de que ocurra el suceso B cuando sabemos que A ha ocurrido se denomina **probabilidad de B condicionada por A** y se designa por el símbolo $P\left(B|A\right)$.

La probabilidad condicionada reduce el espacio de posibilidades con la información adicional que nos proporciona y mejora la probabilidad que se obtiene.

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}$$

Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es igual a la probabilidad de que ocurra primero A, por la probabilidad de que ocurra B si ya ha ocurrido A.

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)$$

Sucesos Independientes

En un fenómeno aleatorio determinado diremos que el suceso B es independiente del suceso A si se cumple $P\left(A|B\right)=P\left(A\right)$ y $P\left(B|A\right)=P\left(B\right)$

Es decir si se cumple $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$

En la probabilidad condicionada un suceso A modifica la probabilidad de que ocurra otro B, pero no siempre la probabilidad condicionada es distinta de la inicial, en este caso un suceso es independiente del otro.

1.4 Principios básicos de la Combinatoria.

Principio de la adición:

Si una tarea se puede realizar de dos formas posibles, dando la primera m resultados posibles y la segunda n resultados posibles, entonces la tarea completa se puede arrojar $m+n$ formas posibles.

$$|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|.$$

Principio de la multiplicación:

Si una experiencia está compuesta de varias etapas y cada una de ellas admite diferentes posibilidades, el número total de situaciones posibles se obtendrá multiplicando.

$$|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|.$$

Principio del Complementario, Sean el conjunto U y dos subconjuntos, A_1 y A_2, de U, tales que:

$$A_1 \cup A_2 = U \text{ y } A_1 \cap A_2 = \varnothing. \text{ Entonces } |A_2| = |U| - |A_1|$$

1.5 Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.

1.5.1 Variaciones sin repetición.

Sea A un conjunto con n elementos y $r \leq n$, llamaremos variación de orden r a toda lista ordenada formada por r elementos distintos de entre los n elementos de A.

Dos listas serán distintas si difieren en algún elemento o en el orden.

El número total de listas se indica: $V(n,r)$.

$$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

1.5.2 Permutaciones sin repetición.

Sea A un conjunto finito formado por n elementos, una permutación de A es una lista ordenada formada por los n elementos de A. Dos permutaciones de A difieren en la colocación de al menos uno de los elementos. Las permutaciones son manera de distribuir objetos.

$$P(n) = n!$$

El ***factorial de un número*** para todo entero positivo n se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n.

La función factorial es formalmente definida mediante el producto:

Si $n > 0$. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Si $n = 0$, $0! = 1$

1.5.3 Combinaciones sin repetición.

Sea A un conjunto finito formado por n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$, una combinación de orden r de A es una lista de elementos de A distintos dos a dos. Diremos que dos combinaciones son diferentes si algún elemento de una lista no se encuentra en la otra. Las combinaciones son maneras de seleccionar objetos.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

El número de combinaciones lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$C_{nr} = \binom{n}{r} = \frac{V_{nr}}{P_r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

1.5.4 Permutaciones con repetición

Sea A un conjunto finito con k elementos ($k > 0$), una permutación con repetición de m elementos de A, es una lista en la que el elemento a_1 se repite m_k veces. Dos listas son distintas si difieren en el orden de sus elementos.

$$PR_n^r = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \ldots r_k!}$$

1.5.5 Variaciones con repetición

Si en la definición anterior podemos repetir elementos obtendremos las variaciones con repetición que se representan por:

$$VR(n,r) = n^r$$

1.5.6 Combinaciones con repetición

Sea A un conjunto finito formado por n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$, una combinación con repetición de orden r de A es una lista de elementos de A en donde los elementos pueden repetirse. Diremos que dos combinaciones con repetición son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra.

$$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

RESUMEN

Tenemos *n* elementos y formamos grupos de *r*.

Agrupación	Importa el Orden	Puede Repetirse	En cada Agrupación	FÓRMULA
Variaciones	SI	NO	$r < n$	$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
Variaciones Repetición	SI	SI	$r < n$	$VR(n,r) = n^r$
Permutaciones	SI	NO	$r = n$	$P(n) = n!$
Permutaciones Repetición	SI	SI	$r = n$	$PR_n^r = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot r_3!\ldots}$
Combinaciones	NO	NO	$r \leq n$	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$
Combinaciones Repetición	NO	SI	$r \leq n$	$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$

2 TEMA 2. Polinomios. Fracciones algebraicas

2.1 Concepto de monomio

Un ***monomio*** es una expresión algebraica formada por un coeficiente y unas variables, en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y las potencias de exponente natural.

2.2 Binomio de Newton

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

2.3 Concepto de polinomio de una variable

Un polinomio, P, con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

El polinomio cero es aquel para el que $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

Se llama grado de un polinomio al exponente de la potencia máxima con coeficiente no nulo.

2.4 Valor número de un polinomios

A todo polinomio $P(x)$ se le puede asociar un valor numérico haciendo corresponder a cada número real x_0 la imagen $P(x_0)$, que se obtiene substituyendo en el polinomio la variable x por el número real x_0:

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

El ***coeficiente binomial*** es igual al coeficiente de x^n en el desarrollo polinómico que corresponde al binomio $(x+1)^m$.

Sean $m = 5$ y $n = 2$, entonces tenemos que ***CoeBin***$(m, n) = 5! / (2! \cdot (5 - 2)!) = 5! / (2! \cdot 3!) = 10$. Coincide con el coeficiente de x^2 en el desarrollo polinómico de $(x + 1)^5$.

2.5 Operaciones con polinomios

SUMA Y RESTA

Se suman o restan los términos de igual grado.

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$$
$$Q(x) = -6x^3 + 7x^2 + 4x + 1$$

$$P(x) + Q(x) = -4x^3 + 11x^2 + 4x + 2$$
$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)) = 8x^3 - 3x^2 - 4x$$

MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de un número por un polinomio.

$$3 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

$$3x^2 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

Multiplicación de polinomios.

Se multiplican uno a uno todos los términos del primero por todos los del segundo.

$$P(x) = 2x^2 4x + 1$$
$$Q(x) = 3x^2 + 2$$

$$P(x) \cdot Q(x) = 6x^4 + 12x^3 + 7x^2 + 8x + 2$$

2.6 División Euclídea polinomios

$$\frac{3x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 \ \ - 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 & 3x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - 3x - 1 & \\
\ \ 3x^2 + 3x + 3 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

2.6.1 Regla de Ruffini

Cuando el divisor es del tipo $x \pm a$ aplicaremos la REGLA DE RUFINI.

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 29}{x - 3}$$

	1	2	-3	4	- 29
3		3	15	36	120
	1	5	12	40	91

Resto: 91

Coeficiente del divisor: $x^3 + 5x^2 + 12x + 40$

2.7 Descomposición en factores de un polinomio

Decimos que un número real ***a*** es una raíz del polinomio P, cuando el valor numérico del polinomio P en ***a*** es cero, es decir, si P(*a*) = 0.

$$P(x) = x^2 - 4x + 4$$
$$P(2) = 4 - 8 + 4 = 0$$

x = 2 es una raíz.

Diremos que un polinomio *P(x)* es divisible por otro polinomio *Q(x)* cuando el resto sea 0.

Un número a es raíz de un polinomio *P(x)*, si y sólo si *P(x)* es divisible por ***x - a***.

Para buscar ***raíces enteras*** de un polinomio hay que ***buscar*** entre los ***divisores del término independiente***.

Un polinomio es ***irreducible*** cuando no puede ser expresado como producto de otros polinomios de menor grado que él.

2.8 Fracciones algebraicas

El objetivo consistirá en descomponer un cociente de polinomios como suma de fracciones más sencilla.

En este caso primeramente debemos efectuar la división.

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}=(x+2)+\frac{x+3}{x^2-1}$$

2.8.1 Descomposición en fracciones simples.

$$\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$A(x-1)+B(x+1)=3x+1$$
$$x=1\rightarrow 2B=4\rightarrow B=2$$
$$x=-1\rightarrow -2A=-2\rightarrow A=1$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

3 TEMA 3. Elementos de geometría. Trigonometría

3.1 Puntos y rectas

	Ecuación explícita $r \equiv y = ax + b$ $s \equiv y = a'x + b'$	Ecuación general $r \equiv Ax + By + C = 0$ $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$
r y s se cortan	$a \neq a'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
r y s son paralelas	$a = a'$ y $b \neq b'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
r y s son coincidentes	$a = a'$ y $b = b'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

3.2 Medida de longitudes de segmentos y ángulos

Dados dos puntos P y Q del plano, se llama ***distancia*** entre P y Q a la medida o longitud del segmento PQ.

Un punto O sobre una recta *r* que divide a una recta en dos partes, llamaremos semirrecta a cada una de las partes.

Dos semirectas con el mismo extremo O determinan dos regiones del plano, cada una de dichas regiones se denomina ángulo.

Los ángulos se designan usando letras griegas, α, β…

Ángulos con medida especial:

- Ángulo recto, mide 90º.
- Ángulo llano, mide 180º.
- Ángulo completo, mide 360º.
- Ángulo agudo, medida menor de 90º.
- Ángulo obtuso, medida mayor 90º.

La circunferencia.

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que distan de otro punto O, llamado *centro* de la circunferencia, una cantidad constante *r* llamada *radio* de la circunferencia.

Ecuación de la circunferencia: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Centro y radio de una circunferencia:

La ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa una circunferencia con:

- Centro: $c:\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.
- Radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

Círculo: dada la circunferencia de centro (x_0, y_0) su círculo es $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2$.

Longitud de la circunferencia: $L=2\pi r$.

Área del círculo: $A=\pi r^2$.

Un ángulo se puede medir de dos maneras, en grados sexagesimales y radianes. En la medida de grados sexagesimales asignamos a una circunferencia completa 360º, cada grado tiene 60´ y cada minuto 60´´. La medida en radianes parte de la definición de radian, diremos que un ángulo mide un radian cuando su arco correspondiente es igual a radio.

Interesa saber pasar de la medida en grados a la medida en radianes. Para ello tendremos en cuenta que:

$2\pi rad$	360º
$\frac{3\pi}{2}$ *rad*	270º
π *rad*	180º
$\frac{\pi}{2}$	90º

Un ángulo de 45º mide: $45\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}radianes$.

Un ángulo que mide $\frac{\pi}{3}$ radianes mide: $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{180}{\pi}=60º$

3.3 Triángulos, triángulos semejantes y teorema de Tales.

Diremos que dos triángulos cuyos ángulos son *α, β, γ* y *α´, β´, γ´* respectivamente, son semejantes si *α = α´, β = β´, γ = γ´.*

La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º.

Teorema de Tales. Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado. Si los lados de dos triángulos son a, b, c y a´, b´, c´ entonces se cumple:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

3.4 El teorema de Pitágoras

La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado.

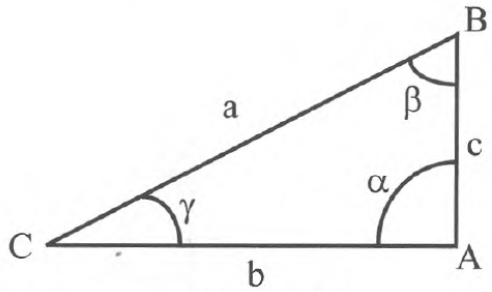
$h^2=b^2+c^2$

3.5 Razones trigonométricas de ángulos agudos

$$sen\gamma\frac{c}{a} \qquad cosec\gamma=\frac{1}{sen\gamma}=\frac{a}{c}$$

$$\cos\gamma\frac{b}{a} \qquad sec\gamma=\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{a}{b}$$

$$tg\gamma=\frac{sen\gamma}{\cos\gamma}=\frac{c}{b} \qquad cotg\gamma=\frac{1}{tg\gamma}=\frac{\cos\gamma}{sen\gamma}=\frac{b}{c}$$



3.6 Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo

$$sen^2\gamma+\cos^2\gamma=1$$

3.7 Algunos cálculos sencillos de razones trigonométricas

Dos ángulos se dicen complementarios si su suma es $\frac{\pi}{2}$

$$sen\gamma=cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right); \qquad cos\gamma=sen\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right);$$

$$tg\gamma=cotg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right); \qquad cotg\gamma=tg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right);$$

3.8 De las razones trigonométricas al ángulo

Si $0 < x < 1$ existe α tal que $sen\ \alpha = x$ *y* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$*;* al ángulo α se le denota *arcsen x.*

3.9 Algunas aplicaciones de la trigonometría

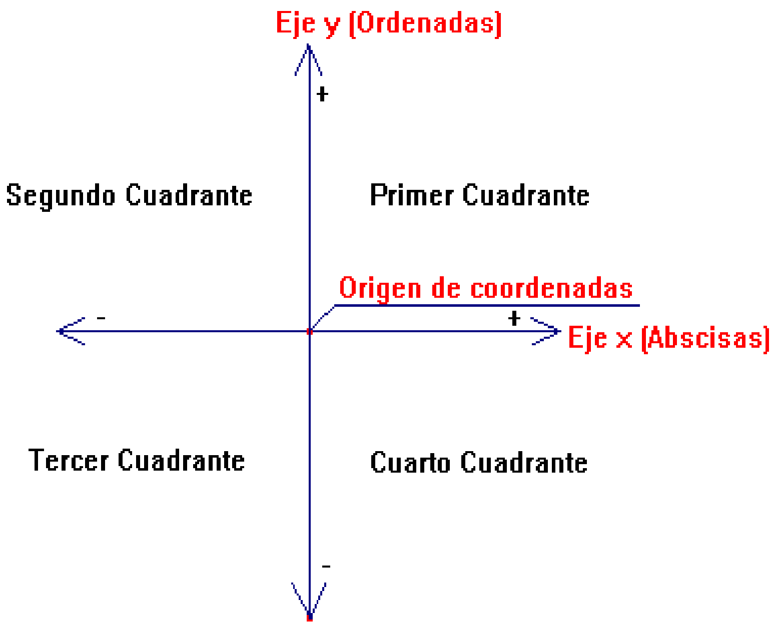
Utilizamos la trigonometría para medición de terrenos, resulta más sencillo y preciso medir ángulos que distancias

Resulta de gran utilidad en la navegación.

3.10 Fórmulas para el seno y el coseno de la suma y diferencia de ángulos

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$
$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$
$$sen(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$$

3.11 Coordenadas



$(x,y) \in 1^{o}$ cuadrante: $x \geq 0, y \geq 0$.

$(x,y) \in 2^{o}$ cuadrante: $x \leq 0, y \geq 0$.

$(x,y) \in 3^{o}$ cuadrante: $x \leq 0, y \leq 0$.

$(x,y) \in 4^{o}$ cuadrante: $x \geq 0, y \leq 0$.

3.12 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

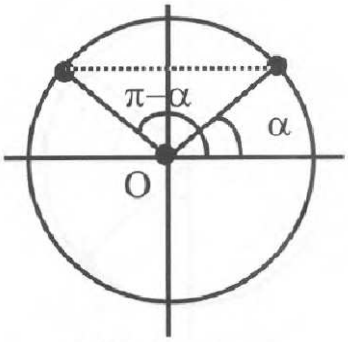


Figura 3.56

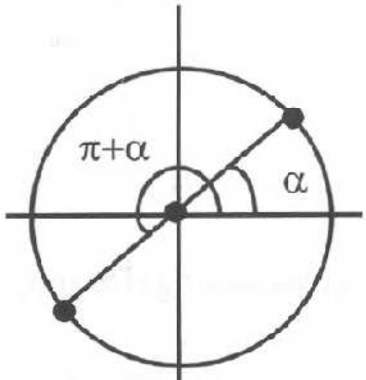


Figura 3.57

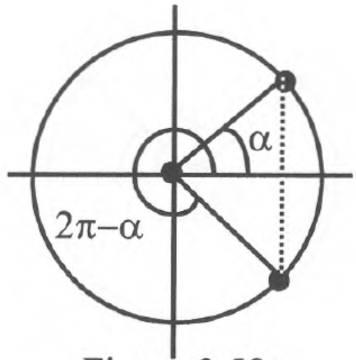
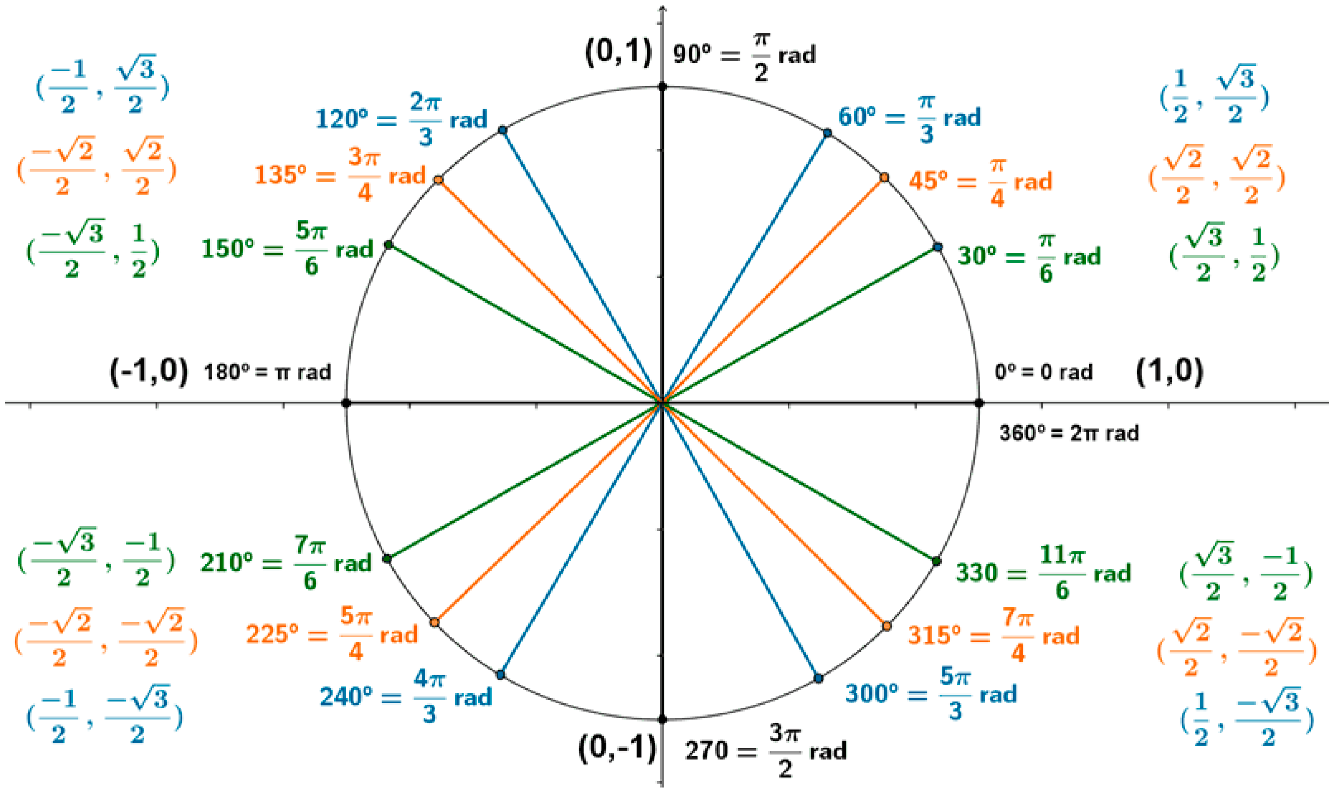


Figura 3.58

sen (π – α) = *sen* α *cos* (π – α) = – *cos* α *tg* (π – α) = – *tg* α *cotg* (π – α) = – *cotg* α	*sen* (π + α) = – *sen* α *cos* (π + α) = – *cos* α *tg* (π + α) = *tg* α *cotg* (π + α) = *cotg* α	*sen* (2π – α) = – *sen* α *cos* (2π – α) = *cos* α *tg* (2π – α) = – *tg* α *cotg* (2π – α) = – *cotg* α



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\csc\theta$	ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
$\cot\theta$	ind	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ind

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\csc\theta$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	ind
$\sec\theta$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ind

4 TEMA 4. Matrices y determinantes

4.1 Concepto de Matriz

Llamaremos ***matriz*** de orden o dimensión $\boldsymbol{m{\cdot}n}$ a todo conjunto de $\boldsymbol{m{\cdot}n}$ números distribuidos en m filas y n columnas. Escribiremos las matrices encerradas entre corchetes.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas. Los elementos con una letra minúscula con los subíndices que indican la fila y columna a_{ij}.

4.2 Tipos de Matriz

Matriz fila, es una matriz de dimensión $1{\cdot}n$, también se denomina vector fila.

$A=[123456]$, matriz fila 1·6.

Matriz columna, es una matriz de dimensión $m{\cdot}1$, también se le denomina vector columna.

$A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, matriz columna 3·1.

Matriz cuadrada, es la que tiene el mismo número de filas que de columnas.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, matriz cuadrada 3·3.

Se denomina ***diagonal principal*** de una matriz cuadrada la los elementos a_{ii}.

$$A=\begin{bmatrix}\color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}}\end{bmatrix}$$

Matriz triangular, es una matriz cuadrada en la que los elementos situados a un mismo lado de la diagonal principal son nulos.

Si son nulos los elementos situados por debajo de la diagonal principal, se denomina ***matriz triangular superior.***

Si son nulos los elementos situados por encima de la diagonal principal, se denomina ***matriz triangular inferior.***

Matriz diagonal, es una matriz cuadrada en la que los elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

Matriz unidad, cuando los elementos de la diagonal principal valen 1.

Matriz nula, todos los elementos son 0.

Matriz opuesta, es una matriz cuyos elementos son los opuestos de los elementos de A.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & -5 & -4\end{bmatrix}$, su opuesta es $-A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 4\end{bmatrix}$

Matriz traspuesta a la matriz obtenida al cambiar filas por columnas.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{bmatrix} \quad A^t=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Matriz simétrica, es la que coincide con su traspuesta.

Matriz antisimétrica, es la que coincide con la opuesta de su traspuesta.

4.3 Operaciones con matrices

4.3.1 Suma y diferencia de matrices

Dadas dos matrices del mismo orden, llamaremos matriz suma a la obtenida sumando término a término, esta suma de matrices tiene las propiedades de una suma de números: asociativa, conmutativa, nula, opuesta.

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$$

Propiedades.

Conmutativa: A + B = B + A.

Asociativa: A + (B +C) = (A + B) + C.

Elemento neutro A + 0 = 0 + A = A.

Elemento simétrico: A + (− A) = (− A) + A = 0.

4.3.2 Multiplicación de un escalar por un número

Para multiplicar un número real por una matriz multiplicamos dicho número por cada elemento de la matriz. Esta operación tiene una serie de propiedades.

4.3.3 Multiplicación de matrices

Dadas dos matrices A y B inicialmente podemos multiplicarlas si columnas de A es igual a filas de B. Si se cumple la condición anterior Columnas - Filas (COFI) vemos como se obtiene el producto.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{bmatrix} \quad B\cdot A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

El producto de matrices tiene las propiedades habituales de un producto excepto la conmutativa, en general $A\cdot B$ es distinto de $B\cdot A$.

Llamaremos potencias de una matriz cuadrada:

$$A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A$$

4.4 Matriz inversa

Cuando se cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Decimos que a tiene inversa, en caso de que exista es única.

Cálculo de la matriz inversa por determinantes

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left[Adj(A) \right]^t$$

4.5 Determinantes

Un determinante será un número que se asigna a toda matriz cuadrada, nos da información sobre el rango de la matriz, la dependencia o independencia de filas y/o columnas.

Determinantes de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinantes de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regla de Sarrus

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

4.6 Cálculo de un determinante por los elementos de una fila o columna

Dada una matriz cuadrada de orden n, A = (a_{ij}), su ***matriz complementaria*** del elemento a_{ij} es la matriz cuadrada de orden $n-1$, que designamos por M_{ij} que se obtiene al eliminar la fila *i-ésima* y la columna *j-ésima* de A.

Dada una matriz cuadrada de orden n, se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la matriz M_{ij}, $| M_{ij} |$.

Dada una matriz cuadrada de orden n, A = (a_{ij}), se llama adjunto del elemento a_{ij}, y se designa por A_{ij} al determinante de la matriz M_{ij}, | M_{ij} |, anteponiendo:

- el signo + si $i+j$ es par
- el signo − si $i+j$ es impar

4.6.1 Desarrollo de un determinante por adjuntos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6$$

Dada una matriz cuadrada de orden n, A = (a_{ij}), se llama matriz adjunta de A, y se representa por Adj(A), a la matriz que se obtiene al sustiruir cada elemento a_{ij}, por su adjunto correspondiente A_{ij}.

La adjunta de la matriz A = (a_{ij}) es Adj(A) = (A_{ij}).

Calculamos la matriz adjunta de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

El determinante de la matriz A es |A| = −2 ≠ 0.

Ahora calculamos los adjuntos de cada a_{ij}.

$$A_{11} = (+)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{12} = (-)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{13} = (+)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = (-)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ A_{22} = (+)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{23} = (-)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (+)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = (-)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = (+)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

4.7 Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta, es decir |A| = $|A^t|$.
- Si los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.
- Si todas las filas o columnas de una matriz de orden n están multiplicadas por un mismo número λ el determinante de la matriz que queda multiplicado por λ^n.
- Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.
- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.
- Si en un determinante se permutan entre sí dos filas o columnas su determinante cambia de signo.
- Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales o proporcionales su determinante es 0.
- Si los elementos de una fila o columna son combinación lineal de las otras, es decir, son el resultado de sumar los elementos de las otras filas o columnas multiplicadas por números reales, su determinante es cero.
- Si a los elementos de una fila o columna se le suma una combinación lineal de otras filas o columnas, su determinante no varía.
- El valor de un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- Si los elementos de una fila o columna son todos nulos, el valor del determinante es cero.

4.8 Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada por determinantes

Una matriz cuadrada es inversible si y solo si su determinante es distinto de cero.

Se calcula mediante la siguiente expresión: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$

Calcular la matriz inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

1. Tenemos que comprobar que la matriz sea inversible, |A| = 12 – 2 = 10 ≠ 0.
2. Calculamos la matriz adjunta de la matriz A.
   $A_{11} = (+)|4| = 4;\ A_{12} = (-)|1| = -1;\ A_{21} = (-)|2| = -2;\ A_{22} = (+)|3| = 3;$
   $Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
3. Se calcula la matriz traspuesta de la matriz Adj(A).
   $Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad [Adj(A)]^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
4. Ahora utilizamos la expresión: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

4.9 Rango de una matriz

Se llama ***submatriz*** de una matriz A a toda matriz que se obtenga suprimiendo un cierto número, que puede ser nulo, de filas y un cierto número, que puede ser nulo, de columnas de la matriz A.

Se llama ***menor*** de una matriz A al determinante de cualquier submatriz cuadrada de la matriz A.

Se llama ***rango*** de una matriz al orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo de dicha matriz.

Podemos descartar una fila si:

- Todos sus coeficientes son cero.
- Existen dos filas iguales.
- Una línea es proporcional a otra.
- Una línea es combinación lineal de otras.

Comprobamos si tiene rango 1, para ello se tiene que cumplir que al menos un elemento de la matriz no sea cero.

Tendrá rango 2 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2, tal que su determinante no sea nulo.

Tendrá rango 3 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo.

5 TEMA 5. Sistemas de ecuaciones lineales

5.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una igualdad con una o más incógnitas donde sólo aparecen números multiplicados por esas incógnitas y suma de esos productos, así como números.

En la ecuación $3x + 2y + 7z = 6$

3, 2 y 7 son los ***coeficientes de las incógnitas*** y 6 es el ***término independiente***.

Cuando el ***término independiente*** es 0 se dice que la ecuación es homogénea.

Resolver, es hallar el valor de las incógnitas.

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales. Soluciones y clasificación.

Un sistema de ecuaciones es de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+5z=1 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x+2y+4z=7 \end{array}\right\}$$

1, −2, 5,..., 2 y 4 son los ***coeficientes del sistema*** y 1,2 y 7 son los ***términos independientes***. x, y, z son las incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones, es hallar el valor de todas las incógnitas que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Cuando los ***términos independientes*** es 0 se dice que el sistema de ecuaciones es homogéneo.

Compatible determinado: una solución.

Compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Incompatible: no tiene solución.

■ □ □ □ ⊙ ■ □ □ ⊙ ⊙ ■ □	Compatible derterminado – Una única solución.
■ □ □ □ ⊙ ■ □ □ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙	Compatible inderterminado – Infinitas soluciones.
■ □ □ □ ⊙ ■ □ □ ⊙ ⊙ ⊙ ■	Incompatible – No hay solución.

Leyenda:
■ Cualquier número real excepto el 0.
⊙ El número 0.
□ Cualquier número real.

5.3 Sistemas equivalentes

Dos sistemas compatibles de ecuaciones son ***equivalentes*** si ambos tienen las mismas soluciones.

En el sistema de ecuaciones E_1, E_2, E_n una combinación lineal de dichas ecuaciones es la ecuación:

$A = aE_1 + bE_2 + ... + hE_n$

donde *a, b, h* son números reales.

5.3.1 Reglas de obtención de sistemas equivalentes

Para pasar de un sistema a otro equivalente, podemos utilizar transformaciones:

- Multiplicar una ecuación por un numero entero distinto de 0.
- Intercambiar el orden de las ecuaciones.
- Si se cambia el orden de las incógnitas, el sistema es equivalente.
- Si una ecuación es combinación lineal de otras, puede suprimirse y el sistema resultante es equivalente al primero.
- Si en un sistema de ecuaciones a una ecuación se le suma una combinación lineal de otras, entonces el sistema resultante es equivalente.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

5.4 Métodos de resolución de sistemas

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Método de sustitución.
- Método de reducción.
- Método de igualación.

MÉTODO DE GAUSS

Está basado en la aplicación de las transformaciones elementales.

Se trata de conseguir que por debajo de la diagonal los coeficientes sean igual a 0. Para ello tendremos que conseguir que sean el contrario del pivote correspondiente en cada caso.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -3x+y-3z=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -5y+3z=0 \\ -9z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ x=1 \end{array}$$

5.5 Matrices asociadas a un sistema de ecuaciones

Dado un sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -3x+y-3z=-3 \end{array}\right\}$

Se denomina ***matriz de coeficientes*** y ***matriz ampliada*** de dicho sistema a las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1+2-1 \\ 2-1+1 \\ -3+1-3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1+2-1 & 1 \\ 2-1+1 & 2 \\ -3+1-3 & -3 \end{bmatrix}$$

matriz de coeficientes ***matriz ampliada***

5.6 Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas de la forma sigiente: $\left.\begin{array}{l} x+2y-\ z=\ 1 \\ 2x-\ y+\ z=\ 2 \\ -3x+\ y-3z=-3 \end{array}\right\}$

Consideramos su matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix} 1+2-1 \\ 2-1+1 \\ -3+1-3 \end{bmatrix}$

Y las matrices columna $X=\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -3x \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Tenemos la siguiente expresión matricial: A·X = B

$$\begin{bmatrix} 1+2-1 \\ 2-1+1 \\ -3+1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Una n-upla $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ es una solución del sistema de cuando A·C = B, siendo:

$$c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

5.7 Método de Cramer

Se aplica en sistemas con igual número de ecuaciones que incógnitas y tales que la matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero. El sistema admite una única solución. Para n = 3:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|};\ y = \frac{|A_y|}{|A|};\ z = \frac{|A_z|}{|A|};$$

5.8 Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema no homogéneo es compatible determinado si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada. Si el sistema es compatible y *r* es ese rango común:

Si $r = n$, el sistema es *compatible determinado*.

Si $r < n$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Si los rangos son distintos, el sistema es *incompatible*.

6 TEMA 6. Geometría vectorial del plano

6.1 Vectores en el plano

Un vector fijo AB es un segmento de origen A y extremo B, que además es distinto del vector fijo BA.

Los vectores fijos AB y A´B´ son ***equivalentes*** si los puntos medios de los segmentos AB´ y A´B coinciden.

Sean A, B, A´ y B´ cuatro puntos del plano de coordenadas (a_1,a_2), (b_1,b_2), $(a´_1,a´_2)$ y $(b´_1,b´_2)$, diremos que el vector fijo AB es equivalente al vector fijo A´B´si y solo si:

$$(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) = (b´_1 - a´_1,\ b´_2 - a´_2)$$

El conjunto de todos los vectores fijos equivalentes a uno dado AB recibe el nombre de ***vector libre***.

Dos vectores libre ***v*** y ***w*** son iguales si y sólo si sus coordenadas son iguales, ***v*** = (a,b) y ***w*** = (c,d), son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

El ***módulo*** o ***norma*** del vector ***v*** = (a,b) es el número $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. ||v|| es una magnitud escalar.

Dado un vector ***v*** llamaremos ***vector opuesto*** de ***v*** al vector que tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto al de ***v***.

Designaremos el vector ***w*** opuesto de ***v*** por **–*v***.

Si ***v*** = (a,b) entonces las coordenadas **–*v*** = (**–**a, **–**b)

6.2 Operaciones con vectores

Sean los vectores libres ***v*** = (a,b) y ***w*** = (c,d), su ***suma*** es el vector: ***v* + *w*** = (a+c,b+d)

Sean los vectores libres ***v*** = (a,b) y ***w*** = (c,d), su ***resta*** es el vector: ***v* − *w*** = (a−c,b−d)

El producto de un número real λ por un vector ***v*** = (a,b) es otro vector cuyas coordenadas son las de v multiplicadas por λ:

$$\lambda\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\cdot(a,b) = (\lambda\cdot a,\ \lambda\cdot b),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Este producto de un escalar por un vector tiene una serie de propiedades.

$\lambda(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{w}$

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}$

$\lambda(\mu\, \boldsymbol{v}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{v}$

$1\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

$0\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$(-1)\cdot\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$

6.3 Producto escalar

Dados los vectores ***v*** = (a,b) y ***w*** = (c,d), se define producto escalar de ***v*** y ***w*** como el número real a·c+b·d

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = (a,b)\cdot(c,d) = a\cdot c+b\cdot d$$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$cos(\beta-\alpha)=\frac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

$$v\cdot w=\|v\|\cdot\|w\|\cdot cos(\beta-\alpha)$$

Podemos deducir que: $v\cdot v=\|v\|^2$, para todo vector ***v.***

Dos vectores no nulos que forman un ángulo de 90º son ***perpendiculares*** u ***ortogonales***.

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean ortogonales es que su producto escalar sea cero.

Diremos que dos vectores son ***colineales*** cuando tienen representantes situados sobre la misma recta.

Dos vectores no nulos ***v*** y ***w*** son colineales si y sólo si ***v*** = (a,b) y ***w*** = (λa,λb), donde λ es un número real no nulo, en este caso ***v*** y ***w*** son ***proporcionales***.

6.4 Combinación lineal de vectores

Un vector ***u*** = (*x*,*y*) es ***combinación lineal*** de ***v*** y de ***w***, es decir, ***u*** depende linealmente de ***v*** y de ***w*** si existen dos número reales λ y μ tales que:

$$\boldsymbol{u} = \lambda\cdot\boldsymbol{v} + \mu\cdot\boldsymbol{w}$$

dos vectores ***v*** y ***w*** son ***linealmente independientes*** si al expresar el vector 0 como combinación lineal de ***v*** y de ***w, es decir:***

$$0 = \lambda\cdot\boldsymbol{v} + \mu\cdot\boldsymbol{w}$$

λ y μ son necesarimente nulos.

Un conjunto de vectores es ***linealmente independiente*** cuando ningún vector es combinación lineal de los demás.

Dos vectores ***v*** = (*x*,*y*) y ***w*** = (*x´*,*y´*) son ***linealmente independientes*** si y sólo si: $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \neq 0$

Dos vectores ***v*** = (*x*,*y*) y ***w*** = (*x´*,*y´*) son ***linealmente dependientes*** o ***proporcionales*** cuando: $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$

Un conjunto de vectores es ***linealmente dependiente*** cuando algún vector es combinación lineal de los demás.

Dados dos vectores ***linealmente independientes***, ***v*** y ***w***, cualquier otro vector ***u*** del plano puede expresarse como combinación lineal de ***v*** y ***w***.

Llamaremos ***Sistema Generador*** a un conjunto ***S*** de vectores, cuando cualquier vector se puede expresar como ***combinación lineal*** de vectores de S.

Un sistema generador formado por vectores ***linealmente independientes*** toma el nombre de ***Base***.

Un mismo espacio vectorial puede tener distintas bases aunque todas ellas están formadas por el mismo número de vectores. A este número se le llama dimensión.

Así decimos que los vectores del plano tienen dimensión 2 y los del espacio dimensión 3 (E_2, E_3).

Dada una base, cualquier vector del espacio se podrá escribir como combinación lineal de ella. Los números de esa combinación lineal reciben el nombre de componentes del vector en la base, y son únicos.

Todo vector del plano se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de una base.

6.5 Rectas del plano y vectores

Una recta ***r*** en el plano queda determinada por un punto ***A*** del plano y un vector no nulo ***v***.

La dirección de la recta r determinada por el punto A y el vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \neq 0$, es el conjunto de vectores

$$D(r) = \{\boldsymbol{tv} = (\boldsymbol{tv_1}, \boldsymbol{tv_2}) : \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\}$$

Los vectores no nulos de $D(r)$ se llaman vectores de dirección de r.

La dirección de la recta r determinada por el punto A = (3,1) y el vector $\boldsymbol{v} = (-1, 2) \neq 0$, es el conjunto de vectores $D(r) = \{\boldsymbol{t}\cdot(-1, 2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-\boldsymbol{t}, 2\boldsymbol{t}) : \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\}$

6.6 Ecuaciones de una recta

Ecuaciones Paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x-2=2t \rightarrow x=2+2t \\ y-3=\ \ t \rightarrow y=3+t \end{array}\right\}$$

Ecuación Continua

$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x-2}{2} \\ t=y-3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}$$

Si despejamos $y - 3$, obtenemos la ecuación punto pendiente: $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$

A $\frac{1}{2}$ lo llamamos pendiente y se denota por "***m***"

Se utiliza con frecuencia la ecuación de la recta $y = mx + b$

Ecuación General, Implícita, Cartesiana.

$Ax + By + C = 0$

Si tenemos la recta r determinada por A = (5,4) y el vector v = (1,−1), podemos obtener una ecuación implícita de r de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ y-4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x+5-y+4=0 \qquad -x+9-y=0$$

Una ecuación implícita de la recta r que pasa por A = (a_1,a_2) y B = (b_1,b_2) es: $\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = 0$

6.7 Posición relativa de dos rectas en el plano

	Ecuación explícita $r \equiv y = ax + b$ $s \equiv y = a'x + b'$	Ecuación general $r \equiv Ax + By + C = 0$ $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$
r y ***s*** se cortan	$a \neq a'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
r y ***s*** son paralelas	$a = a'$ y $b \neq b'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
r y ***s*** son coincidentes	$a = a'$ y $b = b'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Si el sistema de ecuaciones es ***incompatible***, entonces son Paralelas

Si el sistema de ecuaciones es ***compatible indeterminado*** entonces Coinciden

Si el sistema de ecuaciones es ***compatible determinado*** entonces Se Cortan

Las rectas ***r*** y ***s*** son paralelas, ***r*** || ***s***, si y sólo si D(r) = D(s).

Si ***v*** es un vector de dirección de ***r*** y ***w*** es un vector de dirección de ***s***, ***r*** y ***s*** son paralelas si y solo si ***v*** y ***w***, son proporcionales.

Rectas paralelas al eje de abscisas, tienen como vector director ***v*** = ($\boldsymbol{v_1}$,0) por lo que las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t \\ y = a_2 \end{cases}$

Son de esta forma: $y + c = 0$

Vamos a estudiar un sistema de ecuaciones mediante su matriz de coeficientes y su matriz ampliada.

Las rectas r: $2x - 3y + 1 = 0$, s: $4x - 6y + 3 = 0$, son ***paralelas y distintas***, ya que:

$$rango\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = 1, \text{ y } rango\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

Las rectas r: $2x + 3y - 5 = 0$, s: $6x + 9y - 15 = 0$, son ***coinciden***, ya que:

$$rango\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 1, \text{ y } rango\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 9 & -15 \end{bmatrix} = 1$$

Las rectas r: $x - 2y + 4 = 0$, s: $x - y + 1 = 0$, son ***secantes***, ya que:

$$rango\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

6.8 Problemas métricos en el plano

Distancia entre dos puntos (x,y) y (x',y'). $h = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$

El ángulo entre las rectas ***r*** y ***s*** tiene por coseno:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Donde $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2) \in D(r)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2) \in D(s)$, son vectores no nulos.

Las rectas ***r*** y ***s*** son perpendiculares, si y sólo si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$, siendo $\boldsymbol{u} \in D(r)$ y $\boldsymbol{v} \in D(s)$ son dos vectores no nulos.

El vector ***n*** = (a,b) se llama un vector normal de r: ax + by + c = 0 y ***n*** es un vector de dirección de cualquier recta perpendicular a ***r***. también ***n*** es ortogonal a todos los vectores de la dirección de ***r***.

El eje X o eje de abscisas es la recta y = 0, y el eje Y o eje de ordenadas es la recta x = 0.

Ambas son perpendiculares, ya que: $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}' = 0\cdot1 + 1\cdot0 = 0$

Distancia de un punto a una Recta:

Si C = (m1,m2) es un punto del plano y r: ax + by + c = 0 es una ecuación implícita de una recta del plano, entonces:

$$d(C,r) = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7 TEMA 7. Geometría vectorial del espacio

7.1 Espacio, puntos y coordenadas

Un plano es un objeto del espacio, es un conjunto de puntos del espacio formado por los puntos de una superficie que no se curve y que consideramos que se extiende ilimitadamente.

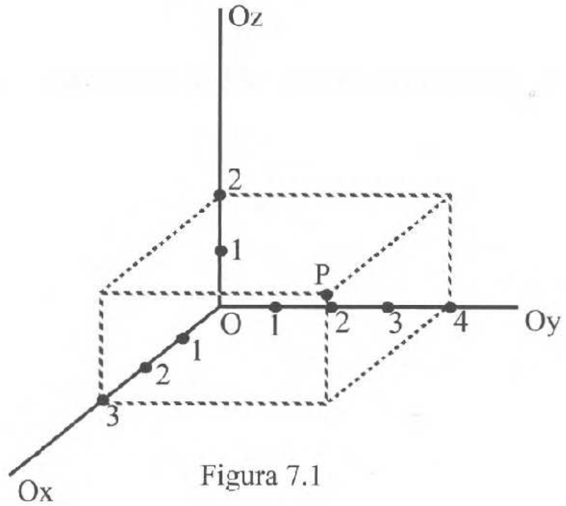


Figura 7.1

Punto P(3,4,2).

7.2 Vectores del espacio

Sean A y B dos puntos del espacio. Al igual que en el plano llamaremos vector fijo AB al segmento orientado de origen A y final B.

Sean A, B, A´ y B´ los puntos de coordenadas (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), $(a´_1,a´_2,a´_3)$ y $(b´_1,b´_2,b´_3)$, diremos que los vectores fijos AB y A´B´ son equivalentes si y solo si:

$$(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3) = (b´_1 - a´_1,\ b´_2 - a´_2,\ b´_3 - a´_3)$$

Son ***equivalentes*** si, son paralelos, tienen la misma longitud y el mismo sentido.

Llamamos vector libre $\boldsymbol{v}_{AB}$ al conjunto de vectores fijos formados por todos los vectores equivalentes a AB y diremos que tiene $\boldsymbol{v}_{AB}$ coordenadas $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$.

Un vector fijo AB que es equivalente a los vectores fijos del vector libre $\boldsymbol{v}$ se dice que es un representante de $\boldsymbol{v}$. Luego AB es un representante de $\boldsymbol{v}_{AB}$.

Definiciones de R^3.

El vector cero es el vector 0 = (0,0,0).

El vector opuesto a $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ es el vector $-\boldsymbol{v} = (-a, -b, -c)$.

El ***módulo*** o ***norma*** del vector $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ es $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ||v|| es una magnitud escalar.

Sean los vectores $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$ y $\boldsymbol{w} = (x´,y´,z´)$, su ***suma*** es el vector: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (x+x´,y+y´,z+z´)$

Dados el vector $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ y el número real λ, el producto $\lambda\boldsymbol{v}$ es el vector $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, además decimos que el vector $\boldsymbol{v}$ y el vector $\lambda\boldsymbol{v}$ son proporcionales.

Dados varios vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_r$ y números reales $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda\boldsymbol{v}_r$, el vector: $\boldsymbol{w} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \lambda_2\boldsymbol{v}_2,\ldots, \lambda\boldsymbol{v}_r\boldsymbol{v}_r$ es una ***combinación lineal*** de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_r$

Dados $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$ y $\boldsymbol{w} = (x',y',z')$, el producto escalar de $\boldsymbol{v}$ por $\boldsymbol{w}$ es $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$, que es un número real.

Se dice que dos vectores son ***ortogonales*** o ***perpendiculares*** si su producto escalar es cero.

Decimos que varios vectores son ***linealmente independientes*** si al expresar el 0 como una combinación lineal de dichos vectores, los coeficientes de la combinación lineal son necesariamente nulos.

Tres vectores $\boldsymbol{v} = (x,y,z),\boldsymbol{w} = (x',y',z')$ y $\boldsymbol{u} = (x'',y'',z'')$ son ***linealmente independientes*** si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \neq 0$$

los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ constituyen la llamada ***base canónica***. del espacio.

7.3 Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores del espacio, $\boldsymbol{v} = (x,y,z),\boldsymbol{w} = (x',y',z')$, que designamos por $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ es un vector con coordenadas

$$v \cdot w = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

Usando determinantes y la base canónica del espacio:

$$v \cdot w = \begin{vmatrix} e_1 & x & x' \\ e_2 & y & y' \\ e_3 & z & z' \end{vmatrix}$$

El ***producto vectorial*** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ es un nuevo vector perpendicular a los vectores dados $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

El ***producto escalar*** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ por cualquier combinación lineal de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ pes 0, ya que

$\boldsymbol{u}\cdot(\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}) = \lambda\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \mu\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) = 0 + 0 = 0$

7.4 Puntos y rectas en el espacio

Dado un punto P del espacio, podemos construir el vector fijo OP, donde O es el origen de coordenadas. Recordemos que el vector libre $\mathbf{v}_{OP}$ es el que tiene por representante a OP. El vector $\mathbf{v}_{OP}$ se denomina el vector de posición del punto P y tiene las mismas coordenadas que P.

La recta r del espacio, determinada por un punto A y un vector no nulo v, es el conjunto de puntos:

$$\boldsymbol{r} = \{P: v_{AP} = \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{v}, \text{ con } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \}$$

La dirección de la recta r en el espacio es el conjunto de vectores: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{tv}: \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \}$

Sea $\boldsymbol{r}$ la recta del espacio determinada por un punto A = (a_1,a_2,a_3) y el vector no nulo v = (v_1,v_2,v_3), entonces P = $(x,y,z) \in \boldsymbol{r}$ si y sólo si $\mathbf{v}_{AP} = \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$, es decir si y sólo si $(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t\cdot(v_1,v_2,v_3)$, o en forma equivalente:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se llaman ***ecuaciones paramétricas*** de ***r***.

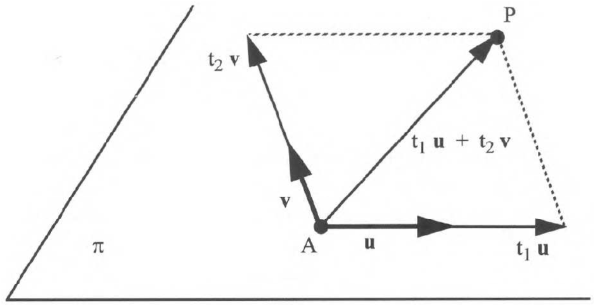
7.5 Planos en el espacio

Dados un punto A y dos vectores *linealmente independientes*, ***u*** y ***v*** en el *plano* π determinado por el punto A y los vectores ***u*** y ***v*** es el conjunto de puntos.

$$\pi = \{P: v_{AP} = \boldsymbol{t_1}\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t_2}\ \boldsymbol{v}, \text{ con } \boldsymbol{t_1},\boldsymbol{t_2} \in \mathbb{R}\}$$

La dirección del plano π es el conjunto de vectores:

$$\boldsymbol{D}(\pi) = \{\boldsymbol{t_1}\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t_2}\ \boldsymbol{v}, \text{ con } \boldsymbol{t_1},\boldsymbol{t_2} \in \mathbb{R}\}$$



Sea π el plano determinado por el punto A = (a_1,a_2,a_3) y los vectores linealmente independientes $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,v_3)$.

Si P es un punto del espacio con coordenadas (x,y,z), entonces P $\in \boldsymbol{\pi}$ si y sólo si existen $\boldsymbol{t_1},\boldsymbol{t_2} \in \mathbb{R}$, tales que:

$$v_{AP} = \boldsymbol{t_1}\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t_2}\ \boldsymbol{v}$$

Es decir, en términos de vectores de posición:

$$\boldsymbol{v}_{OP} = \boldsymbol{v}_{OA} + \boldsymbol{t_1}\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t_2}\ \boldsymbol{v}$$

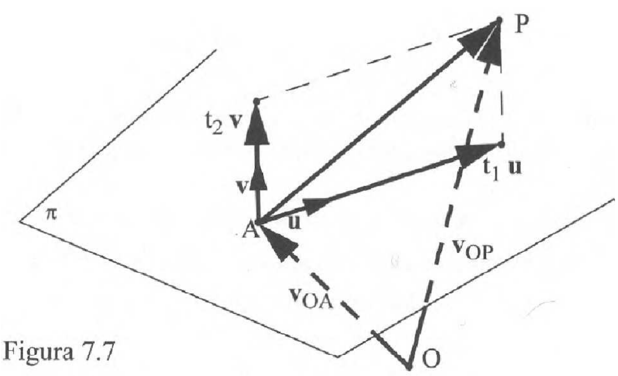


Figura 7.7

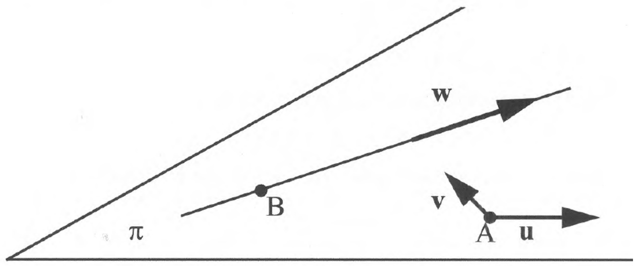
En coordenadas:

$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t_1\cdot(u_1, u_2, u_3) + t_1\cdot(v_1,v_2,v_3)$, con $\boldsymbol{t_1,t_2} \in \mathbb{R}$, o de forma equivalente:

$$\begin{cases} x = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\ y = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 \\ z = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 \end{cases}, \text{ con } \boldsymbol{t_1,t_2} \in \mathbb{R},$$

Se dice que las ecuaciones anteriores son unas ecuaciones paramétricas del plano π. En este caso, los parámetros son $\boldsymbol{t_1}$ y $\boldsymbol{t_2}$.

Si ***r*** es una recta contenida en el plano π entonces D(***r***) está contenido en D(π).



P ∈ **π** si y sólo si el vector $\boldsymbol{v_{AP}}$ depende linealmente de ***u*** y ***v*.**

Es decir:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & u_1 & v_1 \\ y-a_2 & u_2 & v_2 \\ z-a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Donde A = (a_1,a_2,a_3), ***u*** = (u_1, u_2, u_3) y v =$\cdot(v_1,v_2,v_3)$. Desarrollando obtenemos $n_1x + n_2y + n_3z + n_0 = 0$

Que es la ecuación implícita o cartesiana del plano π.

Sean n = (n_1,n_2,n_3) el producto vectorial ***u*** · ***v***.

$$n = u \cdot v = \begin{vmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Si P ∈ **π** entonces: $n_1\cdot(x - a_1) + n_2\cdot(y - a_2) + n_3\cdot(z - a_3) = 0$

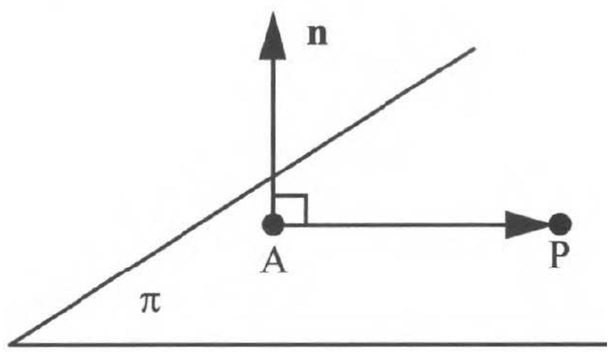
Como los vectores ***u*** y ***v*** son linealmente independientes, el vector ***n*** ≠ 0.

Se dice que el vector ***n*** = ***u*** · ***v*** es un vector normal del plano π.

Este vector ***n*** es ortogonal a ***u*** y a ***v***, por tanto, ortogonal a cada vector $\boldsymbol{t_1\, u + t_2\, v}$ en la dirección de π.

Se puede expresar el plano π en función del punto A y del vector ***n*** como sigue:

π = {P = (x,y,z): $n_1\cdot(x - a_1) + n_2\cdot(y - a_2) + n_3\cdot(z - a_3) = 0$} o su equivalente π = {P : $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_{AP} = 0$}



La ecuación $n_1 \cdot (x - a_1) + n_2 \cdot (y - a_2) + n_3 \cdot (z - a_3) = 0$ se puede escribir en la forma:

$n_1 x + n_2 \cdot y + n_3 z + n_0 = 0$

con $n_0 = -(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3)$

una ecuación implícita del plano que pasa por los puntos no alineados A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) y C =·(c_1, c_2, c_3) es:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

7.6 Posiciones relativas de dos planos en el espacio.

Para conocer la posición relativa de dos planos en el espacio hay que estudiar si los planos tienen puntos en común, lo haremos resolviendo un sistema de ecuaciones de dichos planos.

Este sistema está formado por dos ecuaciones con tres incógnitas y lo resolvemos con el teorema de Rouché-Fröbenius.

Dos planos π y ρ son paralelos si tienen la misma dirección, es decir: $D(\pi) = D(\rho)$.

Si dos planos π y ρ son paralelos entonces $(\pi = \rho)$ o bien $(\pi \cap \rho = \varnothing)$.

Si π y ρ son paralelos, admiten ecuaciones implícitas de la forma:

$$\pi: n_1 x + n_2 \cdot y + n_3 z + n_0 = 0, \quad \rho: n_1 x + n_2 \cdot y + n_3 z + n'_0 = 0$$

$$((n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0))$$

Un punto P de coordenadas $(x,y,z) \in \boldsymbol{r} = \pi \cap \rho$ si y solamente si:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Se dice que el sistema anterior son unas ***ecuaciones implícitas o cartesianas*** de la recta ***r***.

7.7 Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Dados una recta ***r*** y un plano π en el espacio, diremos que ***r*** es paralela a π si la dirección de ***r*** está contenida en la dirección de π.

Si una recta r es paralela a un plano π entonces o bien $\pi \supset r$, o bien $r \cap \pi = \varnothing$

Dados una recta $r = \{P: v_{BP} = \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{w}$, con $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\}$ y un plano π, pueden darse tres casos distintos:

- $\boldsymbol{w} \in D(\pi)$ y $B \in \pi$. Entonces ***r*** es paralela a π y como $B \in r \cap \pi$, entonces la recta está contenida en el plano.
- $\boldsymbol{w} \in D(\pi)$ y $B \notin \pi$. Entonces ***r*** es paralela a π y *r* no está contenida en π.
- $\boldsymbol{w} \notin D(\pi)$. Entonces ***r*** no es paralela a π. En este caso se dice que la recta y el plano son secantes.

Sea ***r*** una recta y π un plano, de modo que *r* y π son secantes. Entonces existe un punto *Q* único tal que $r \cap \pi = \{Q\}$.

7.8 Posición relativa de dos rectas en el espacio

Dos rectas ***r*** y ***s*** son paralelas si $D(\boldsymbol{r}) = D(\boldsymbol{s})$.

Si dos rectas ***r*** y ***s*** son paralelas entonces o bien $r = s$ o bien $r \cap s = \varnothing$.

Las rectas ***r*** y ***s*** son paralelas si y sólo si $\{v,w\}$ son *linealmente independientes*, es decir, si son *proporcionales*.

Diremos que dos rectas son ***coplanarias*** si existe un plano que contiene a ambas.

Dos rectas se ***cruzan***, si y sólo si no son coplanarias.

Las rectas en el espacio pueden ser paralelas o no.

En el caso de que ***sean paralelas*** puede ocurrir que:

- Sean paralelas y coincidentes, es decir iguales.
- Sean paralelas y no coincidentes.

En el caso de que ***no sean paralelas*** puede ocurrir que:

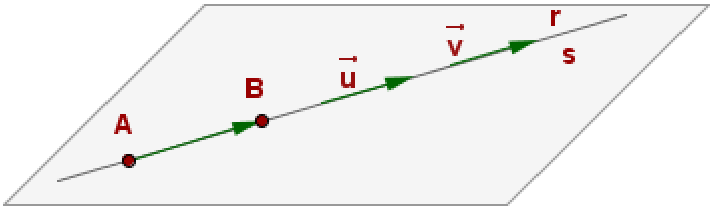
- Están en el mismo plano y ***se cortan***, es decir, que sean ***secantes***.
- No están en el mismo plano y ***se cruzan***

A continuación vamos a ver una serie de ejemplos.

Si $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$ hay dos posibilidades:

1. Sean las rectas dadas por las ecuaciones parámetricas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$



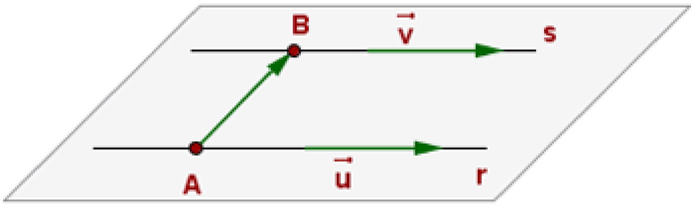
Punto A = (1,1,1), Punto B = (3,1,2)
v = (2,0,1) y ***w*** = (4,0,2).
Por un lado tenemos que ***w*** = 2·***v***, las dos rectas ***r*** y ***s son paralelas***.
Además $\mathbf{v}_{AB}$ = (2,0,1) ∈ D(***r***) = D(***s***). Por lo tanto ***r*** = ***s, son coincidentes***

Otra forma de resolverlo es:

$$\frac{x_2 - x_1}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{v_2} = \frac{z_2 - z_1}{v_3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{2} = \frac{0}{0} = \frac{1}{1}$$

2. Sean las rectas dadas por las ecuaciones parámetricas:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$



Punto A = (0,0,0), Punto B = (2,1,1)
v = (1,1,1) y ***w*** = (3,3,3).
Por un lado tenemos que ***w*** = 3·***v***, las dos rectas ***r*** y ***s son paralelas***.
Además $\mathbf{v}_{AB}$ = (2,1,1) ∉ D(***r***) = D(***s***). Por lo tanto ***no son coincidentes***

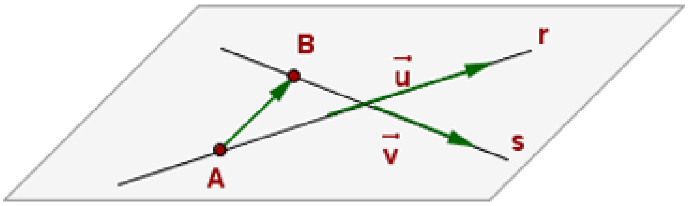
Otra forma de resolverlo es:

$$\frac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{v_2} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{v_3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} \quad \text{o} \quad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}$$

Si $\frac{v_1}{w_1} \neq \frac{v_2}{w_2} \neq \frac{v_3}{w_3}$ hay dos posibilidades:

3. Sean las rectas dadas por las ecuaciones parámetricas:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$$



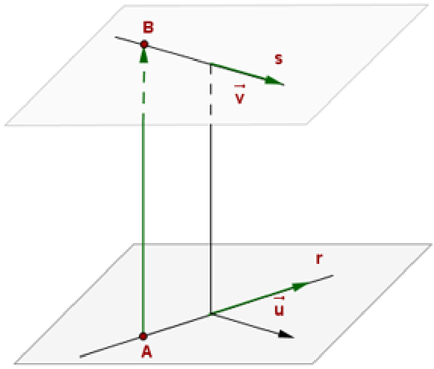
Punto A = (0,0,0), Punto B = (3,1,2)
v = (2,0,1) y ***w*** = (1,1,1).
Por un lado tenemos que ***v*** y ***w*** son ***linealmente independientes***, las dos rectas ***r*** y ***s no son paralelas***.
Además $\boldsymbol{v}_{AB}$ = (3,1,2) = ***v*** + ***w***. Por lo tanto ***r*** y ***s, son secantes. Se cortan*** en el mismo plano**.**
Se cortan en el punto ***Q*** = (2,0,1)
Tenemos en ***r*** que ***y*** = 0. Si vamos a ***s, t*** = −1; ***x*** = 2; ***y*** = 0; ***z*** = 1.

Otra forma de resolverlo es:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & v_1 & w_1 \\ y_2 - y_1 & v_2 & w_2 \\ z_2 - z_1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Sean las rectas dadas por las ecuaciones parámetricas:

$$r: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2+2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 5-t \\ z = 2+t \end{cases}$$



Punto A = (3,2,1), Punto B = (3,5,2)
v = (1,2,1) y ***w*** = (1,−1,1).
Por un lado tenemos que ***v*** y ***w*** son ***linealmente independientes***, las dos rectas ***r*** y ***s no son paralelas***.
Además $\boldsymbol{v}_{AB}$ = (0,3,1). Los vectores { $\boldsymbol{v}_{AB}$, ***v, w***} son ***linealmente independientes***. Las rectas se cruzan en planos distintos.

Otra forma de resolverlo es:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & v_1 & w_1 \\ y_2 - y_1 & v_2 & w_2 \\ z_2 - z_1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

7.9 Problemas métricos en el espacio

Si tenemos los puntos A = (a_1,a_2,a_3), B = (b_1, b_2, b_3), la distancia será:

$$d(A,B)=\|v_{AB}\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Dadas dos rectas ***r*** y ***s***, el ángulo que forman es el menor de los ángulos formados por dos vectores no nulos, ***u*** y ***v***, donde ***u*** ∈ D(***r***) y ***v*** ∈ D(***s***).

Si α es el ángulo formado por ***r*** y ***s***, tenemos que:

$$\cos\alpha=\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\cdot\|v\|}=\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Siendo ***u*** = (u_1, u_2, u_3) ∈ D(***r***), ***u*** ≠ 0 y ***v*** =·(v_1,v_2,v_3) ∈ D(***s***), ***v*** ≠ 0.

Las rectas ***r*** y ***s***, son perpendiculares si y sólo si el ángulo α que forman es 90º o $\frac{\pi}{2}$ radianes, es decir si y sólo si ***u***·***v*** = 0, es decir, los vectores ***u*** y ***v*** son ortogonales.

Las rectas ***r*** y un plano π son perpendiculares si ***r*** es perpendicular a toda recta ***s*** contenida en el plano π.

Si tomamos ***u*** ∈ D(***r***), ***v***, ***w*** ∈ D(***π***), con ***u*** ≠ 0, ***v*** y ***w*** linealmente independientes y ***n*** ≠ 0 un vector normal de π, entonces:

r y π son perpendiculares si y sólo si (***u***·***v*** = 0) y (***u***·***w*** = 0), es decir, si y sólo si ***u*** y ***n*** son linealmente dependientes.

Sean π y ρ dos planos en el espacio, con vectores normales ***n*** = (n_1, n_2, n_3) y ***n*** = (n'_1, n'_2, n'_3), respectivamente. Entonces:

Los dos planos son perpendiculares si y sólo si ***n***·***n´*** = 0, es decir, si y sólo si:

$$\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n'_1}+\boldsymbol{n_2}\cdot\boldsymbol{n'_2}+\boldsymbol{n_3}\cdot\boldsymbol{n'_3}+=0$$

Se puede demostrar que: d(C,π) = d(C,Q)

Donde Q es el punto de intersección del plano π con la recta que pasa por C y es perpendicular a π.

Distancia de un punto a un plano:

Si C es el punto (c_1, c_2, c_3) y π: $n_1x + n_2\cdot y + n_3z + n_0 = 0$, entonces:

$$d(C,\pi)=\frac{|n_1c_1+n_2c_2+n_3c_3+n_0|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$$

Contenido