Propiedades básicas de los tableaux para fórmulas proposicionales

Si desea comprobar que una fórmula es ***consecuencia*** de otras, niéguela e incorpórela a esas otras.
Si este nuevo conjunto resulta insatisfacible, efectivamente existía aquella relación de consecuencia.

1. Se utilizan para decidir la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas; indirectamente, para decidir la relación de consecuencia entre una fórmula y un conjunto: niegue aquélla e incorpórela al conjunto inicial analizado
2. Se construye un primer árbol, con una sola rama, que consta de tantos nodos como fórmulas haya en el conjunto inicial
3. Las ramas se pueden bifurcar si es de tipo β (disyuntiva) o ampliar linealmente si es de tipo α (conjuntiva), los nodos añadidos son subfórmulas adecuadas negadas o no de una fórmula en esa rama
4. Una rama es satisfacible si lo es el conjunto de todas sus fórmulas.
5. Si entre ellas se encuentran tanto una fórmula como su negación, la rama es insatisfacible.
6. Un árbol es satisfacible si lo es alguna de sus ramas
7. El árbol inicial es tan satisfacible como los sucesivos árboles ampliados; así, si se detecta que alguno de ellos es insatisfacible, también lo era el conjunto inicial de fórmulas

Figura 1.21 Notación uniforme.

Conjuntiva			Disyuntiva		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \rightarrow Y)$	X	$\neg Y$	$X \rightarrow Y$	$\neg X$	Y
$\neg(X \leftarrow Y)$	$\neg X$	Y	$X \leftarrow Y$	X	$\neg Y$
$\neg(X \uparrow Y)$	X	Y	$X \uparrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \downarrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg(X \downarrow Y)$	X	Y
$X \nrightarrow Y$	X	$\neg Y$	$\neg(X \nrightarrow Y)$	$\neg X$	Y
$X \nleftarrow Y$	$\neg X$	Y	$\neg(X \nleftarrow Y)$	X	$\neg Y$

α: alfa
β : beta
γ : gamma
δ : delta

Reglas de expansión γ y δ

Tabla 2.4 Notificación uniforme, fórmulas cuantificadotas.

Universales		Existenciales	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(a)$
$\forall x X$ $\neg\exists x X$	$X(t)$ $X(t)$	$\exists x X$ $\neg\forall x X$	$X(a)$ $X(a)$

Todas ellas producen una expansión del árbol en un sólo nodo. No producen bifurcación del árbol.
Se obtiene una fórmula omitiendo el cuantificador principal.
Es lo que se conoce como instancia por sustitución de esta subfórmula.

El párrafo siguiente expone cuáles pueden ser las cadenas sustituyentes.

Parámetros. Cada lenguaje de primer orden fija sus propias constantes y funciones. Si se pretende que el lenguaje sirva, por ejemplo, para razonar sobre números naturales, debe incluir una constante (que se asignará al 0) y una función (la función sucesor).

Regla de expansión γ.
Los nodos "universales", pueden reutilizarse, expandirse en todas las ramas a las que pertenezcan cuantas veces se desee. Se puede escoger en su expansión cualquier constante, utilizada anteriormente o no, estratégicamente, conviene utilizar constantes ya empleadas, para cerrar ramas.

Las fórmulas γ son del tipo $\forall x\phi$ ó $\neg\exists x\phi$. Su expansión es un único nodo de la forma $\phi\,(x/p)$ o $\neg\phi\,(x/p)$ respectivamente, donde todas las apariciones libres de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo término t. Este término debe ser cerrado: no debe incluir variables, sólo constantes y funciones de L o constantes auxiliares.

Regla de expansión δ.
Deben utilizarse constantes no empleadas anteriormente, al menos no empleadas en esa rama.

Las fórmulas δ son del tipo $\exists x\phi$ ó $\neg\forall x\phi$. Su expansión es un único nodo de la forma $\phi\,(x/p)$ o $\neg\phi\,(x/p)$ respectivamente, donde todas las apariciones libres en ϕ de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo parámetro p. Este parámetro, esta constante auxiliar, debe ser nueva en el árbol: no puede figurar en ninguna fórmula previa (realmente, basta que sea nueva en la rama).
Cada instanciación debe hacerse sobre una constante nueva. De lo contrario, esta constante tendría unas propiedades (fijadas en otras fórmulas, donde aparece) que pueden modificar (innecesariamente) la decisión final sobre la satisfabilidad del conjunto.

Tabla 2.5 Reglas de expansión de un Tableau.

Conectivas monarias	$\frac{\neg\neg X}{X}$ $\quad \frac{\neg\top}{\bot}$ $\quad \frac{\neg\bot}{\top}$
Conectivas binarias	$\frac{\alpha}{\alpha_1}$ $\quad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$
Cuantificador universal	$\frac{\gamma}{\gamma(t)}$ (para cualquier término t cerrado de L^{par})
Cuantificador existencial	$\frac{\delta}{\delta(p)}$ (para cualquier parámetro p nuevo)

Estratégicamente, siempre es preferible expandir primero las fórmulas proposicionales α y β, luego las existenciales (δ) y finalmente las universales (γ) para intentar cerrar.

Pregunta de desarrollo Febrero 2011 A

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

$$\forall x \exists y (Sxy \vee Syx) \vDash \exists x (\exists y Sxy \vee \exists y Syx)$$

1. $\forall x \exists y (Sxy \vee Syx)$

2. $\neg \exists y (\exists y Sxy \vee \exists y Syx)$

$\gamma, 2$

3. $\neg(\exists y Say \vee \exists y Sya)$

$\alpha_1, 3$

4. $\neg \exists y Say$

$\alpha_2, 3$

5. $\neg \exists y Sya$

$\delta, 1$

6. $\exists y (Say \vee Sya)$

$\delta, 6$

7. $Sab \vee Sba$

$\alpha_1, 7$ $\alpha_2, 7$

8. Sab 9. Sba

$\gamma, 4$ $\gamma, 4$

10. $\neg Sab$ 11. $\neg Sba$

Estratégicamente es preferible instanciar cuanto antes los nodos existenciales, que producen necesariamente términos constantes nuevos. Ni [1] ni [2] lo son. Optamos por expandir [2] (universal, negación de existencial) en [3]. Y [3] (negación de disyunción), en [4] y [5].

Aquí es preferible parar de momento. Tanto [4] como [5] son universales (negación de existencial). Expandimos entretanto el nodo [1] (universal) en [6]. El nodo [6] es existencial: estamos obligados a usar una constante no utilizada previamente. Así se produce [7].

Como [7] es una disyunción, se produce una bifurcación del árbol en [8] y [9]. La rama de [8] se cierra expandiendo allí [4] para producir [10]: como [4] era universal se puede instanciar en la constante que se desee. Lo mismo ocurre con el nodo [11], instanciación del [5].

Pregunta de desarrollo Febrero 2011 C

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

$$\exists x Sxx \vDash \neg \forall x \forall y (Sxy \rightarrow \neg Syx)$$

1. $\exists x Sxx$

2. $\neg\neg \forall x \forall y (Sxy \rightarrow \neg Syx)$

2

3. $\forall x \forall y (Sxy \rightarrow \neg Syx)$

$\delta,1$

4. Saa

$\gamma,3$

5. $\forall y (Say \rightarrow \neg Sya)$

$\gamma,5$

6. $(Saa \rightarrow \neg Saa)$

$\beta_1,6$ $\quad$ $\beta_2,6$

7. $\neg Saa$ $\quad$ 8. $\neg Saa$

Pregunta de desarrollo Septiembre 2011 A

Septiembre 2012 B, Septiembre 2012 D

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

$$\neg\exists x\forall y(Pxy \wedge Pyx) \vDash \exists x(\exists y\neg Pxy \vee \exists y\neg Pyx)$$

1. $\neg\exists x\forall y(Pxy \wedge Pyx)$

2. $\neg\exists x(\exists y\neg Pxy \vee \exists y\neg Pyx)$

$\downarrow$ 2

3. $\neg\exists x\exists y(\neg Pxy \vee \neg Pyx)$

$\downarrow$ γ,3

4. $\neg\exists y(\neg Pay \vee \neg Pya)$

$\downarrow$ γ,4

5. $\neg(\neg Pab \vee \neg Pba)$

$\downarrow$ α_1,5

6. Pab

$\downarrow$ α_2,5

7. Pba

$\downarrow$ γ,1

8. $\neg\forall y(Pay \wedge Pya)$

$\downarrow$ δ,8

9. $\neg(Pab \wedge Pba)$

$\swarrow$ α_1,9 $\qquad$ α_2,9 $\searrow$

10. $\neg Pab$	11. $\neg Pba$

Pregunta de desarrollo

Septiembre 2011 B, Septiembre 2012 A

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

$$\forall x\exists y(\neg Pxy \vee \neg Pyx) \vDash \exists x(\exists y\neg Pxy \vee \exists y\neg Pyx)$$

1. $\forall x\exists y(\neg Pxy \vee \neg Pyx)$

$\downarrow$

2. $\neg\exists x(\exists y\neg Pxy \vee \exists y\neg Pyx)$

$\downarrow$ 2

3. $\neg\exists x\exists y(\neg Pxy \vee \neg Pyx)$

$\downarrow$ γ,3

4. $\neg\exists y(\neg Pay \vee \neg Pya)$

$\downarrow$ γ,4

5. $\neg(\neg Pab \vee \neg Pba)$

$\downarrow$ α_1,5

6. Pab

$\downarrow$ α_2,5

7. Pba

$\downarrow$ γ,1

8. $\exists y(\neg Pay \vee \neg Pya)$

$\downarrow$ δ,8

9. $(\neg Pab \vee \neg Pba)$

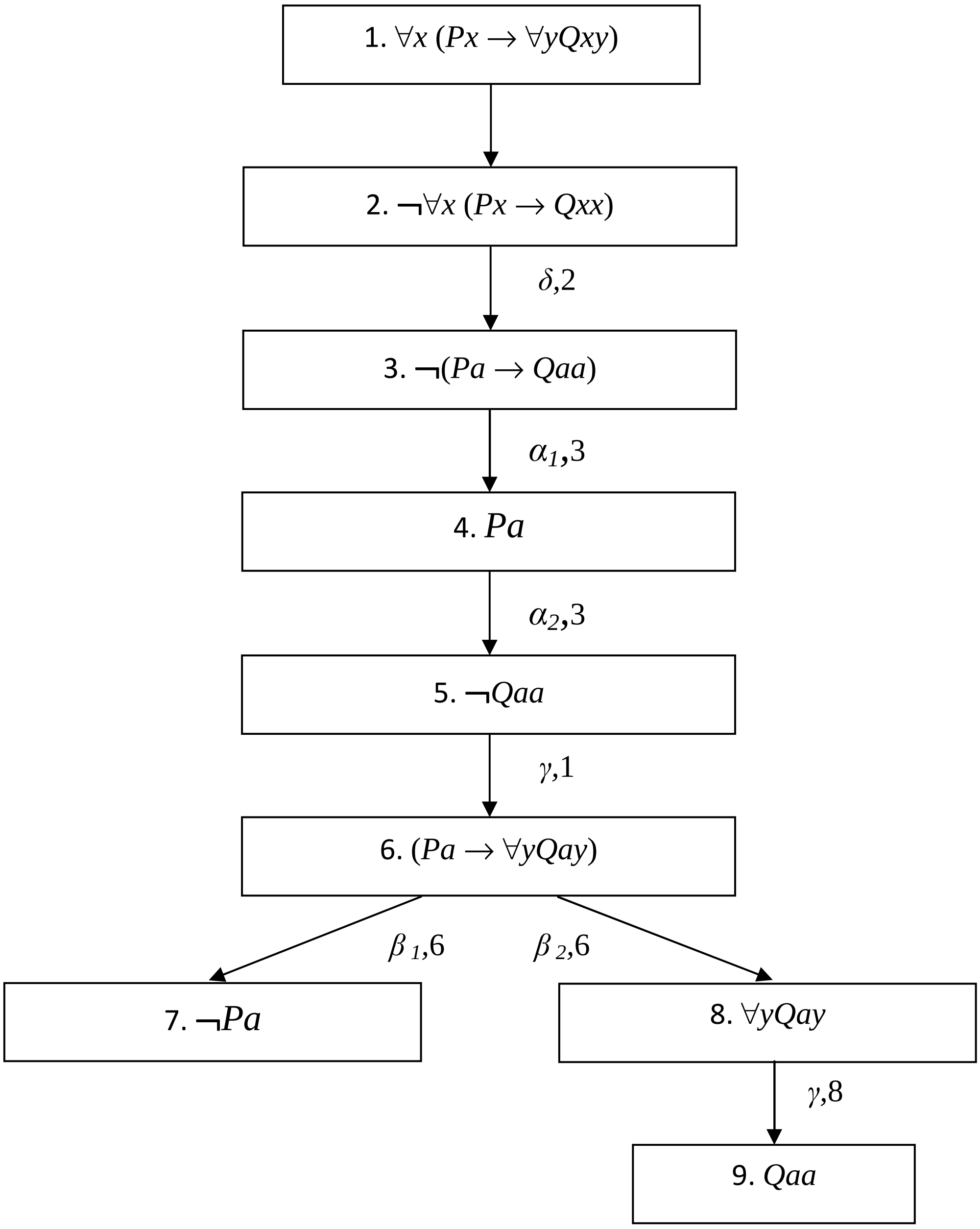
$\swarrow$ α_1,9 $\qquad$ α_2,9 $\searrow$

10. $\neg Pab$	11. $\neg Pba$

Pregunta de desarrollo Febrero 2012 A

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

$$\forall x\,(Px \rightarrow \forall y Qxy) \vDash \forall x\,(Px \rightarrow Qxx)$$



Pregunta de desarrollo Febrero 2012 C

Demuestre, mediante un tableau, que es correcto el siguiente argumento:

De Z_1 es consecuencia, se deduce Z_4: $\forall x\,(Px \wedge \exists yQxy) \vDash \forall x\,(Qxx \rightarrow Px)$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1.\ \forall x\,(Px \wedge \exists yQxy)} \arrow[d] \\
\boxed{2.\ \neg\forall x\,(Qxx \rightarrow Px)} \arrow[d, "{\gamma,2}"] \\
\boxed{3.\ \neg\,(Qaa \rightarrow Pa)} \arrow[d, "{\alpha_1,3}"] \\
\boxed{4.\ Qaa} \arrow[d, "{\alpha_2,3}"] \\
\boxed{5.\ \neg\,Pa} \arrow[d, "{\gamma,1}"] \\
\boxed{6.\ Pa \wedge \exists yQay} \arrow[d, "{\alpha_1,6}"] \\
\boxed{7.\ Pa} \arrow[d, "{\alpha_2,6}"] \\
\boxed{10.\ \exists yQay}
\end{tikzcd}$$