Principia Matemática

- Conjunción ($\wedge$): $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$
- Condicional ($\rightarrow$): $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- Bicondicional ($\leftrightarrow$): $p \leftrightarrow q \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \equiv [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)]$
- Disyuntiva exclusa ($\oplus$): $p \oplus q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$

Axiomas y reglas de PM

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $q \rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

Sistema inferencial del calculo de proposiciones:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow R \\ \underline{\neg R\quad} \\ \neg S \end{array}$$

Se representa: $D((S \rightarrow R) \wedge \neg R, \neg S)$.
C es una conclusión lógica de P1, P2...: $(P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn) \rightarrow C$. $(D[((S \rightarrow R) \wedge \neg R) \rightarrow \neg S])$.
O bien: $(P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge \neg C)$ $((S \rightarrow R) \wedge \neg R \wedge S)$, es una contradicción.
Sea 'R' la implicación directa o primitiva: $S \rightarrow T$.
Se llama contraria de 'R': $\neg S \rightarrow \neg T$.
Recíproca de 'R': $T \rightarrow S$.
Contrarecíproca de 'R': $\neg T \rightarrow \neg S$.

a) La implicación directa y su contrarrecíproca son equivalentes entre sí.
b) La implicación contraria y su directa no son equivalentes en general. La negación de la contraria tampoco es equivalente a la contraria. La negación de la contraria es equivalente a la directa.
c) La implicación recíproca y su directa no son equivalentes. Tampoco la negación de la directa es equivalente a la recíproca. La negación de la recíproca es equivalente a la directa.
d) La implicación contraria de la directa y la recíproca de la directa son equivalentes entre sí, son mutuamente contrarrecíprocas una de otra.

$T \rightarrow S$: 'S' es necesaria para 'T'; 'T' es suficiente para 'S'.
$T \leftrightarrow S$: 'T' es necesaria y suficiente para 'S'; 'S' es necesaria y suficiente para 'T'.

Reglas de inferencia

1. Regla de separación (Sep.) o del modus ponens. Regla de eliminación del condicional (RE$\rightarrow$):

$$\begin{array}{l} S \rightarrow R \\ \underline{S\quad\;} \\ R \end{array}$$

2. Regla de unión (Un.) o de introducción de la conjunción (RI $\wedge$):

$$\begin{array}{l} S \\ \underline{R\quad\;} \\ S \wedge R \end{array}$$

3. Regla de inserción (Ins.):
   $S \to R$
   $\underline{R \to T}$
   $S \to T$
4. Regla de intercambio (Int.):
   $S \to R$
   $\underline{R \leftrightarrow T}$
   $S \to T$

Principio de resolución para la lógica de proposiciones:

1. Eliminar los condicionales y bicondicionales aplicando las definiciones de los mismos.
2. Introducir las negaciones aplicando las leyes de Morgan.
3. Pasar a forma clausulada aplicando la ley distributiva para la disyunción.
4. Simplificar (Escribir solo una vez cláusulas idénticas, eliminar tautologías, escribir solo una vez si aparece el mismo literal varias veces en una cláusula).

Tabla de verdad para conectivas

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Dos nuevas conectivas: (De interés en informática)

NOR ($\downarrow$) y NAND ($|$).
$(p \downarrow q) \equiv \neg(p \vee q)$; $(p|q) \equiv \neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \downarrow q$	$p \vert q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Leyes de la lógica de proposiciones

1. Ley de identidad:
   $p \to p$
   $p \leftrightarrow p$
2. Ley de la doble negación:
   $p \leftrightarrow \neg\neg p$
3. Ley del tercio excluso:
   $p \vee \neg p$

4. Ley de contradicción:
   $\neg(p\wedge\neg p)$
5. Leyes de Morgan:
   $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
   $\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
6. Leyes de reducción al absurdo:
   $(\neg p\rightarrow(q\wedge\neg q))\leftrightarrow p$
7. Leyes de conmutación:
   $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$
   $(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$
   $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$
8. Leyes de asociación:
   $((p\vee q)\vee r)\leftrightarrow(p\vee(q\vee r))$
   $((p\wedge q)\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge(q\wedge r))$
   $((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)\leftrightarrow(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))$
9. Leyes de transposición:
   $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$
   $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\leftrightarrow\neg p)$
10. Leyes distributivas:
    $(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
    $(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
    $(p\rightarrow(q\wedge r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))$
    $(p\rightarrow(q\vee r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\vee(p\rightarrow r))$
11. Leyes de permutación:
    $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$
12. Leyes del silogismo:
    $(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$
13. Silogismo hipotético o transitividad
    $((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$
    $((p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r))\rightarrow(p\leftrightarrow r)$
14. Leyes de inferencia de la alternativa o de los silogismos disyuntivos:
    $[\neg p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$
    $[p\wedge(\neg p\vee\neg q)]\rightarrow\neg q$
15. Ley del dilema constructivo:
    $[(p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow r$
16. Segunda ley del dilema constructivo:
    $[(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\wedge(p\vee r)]\rightarrow(q\vee s)$
17. Ley del dilema destructivo:
    $[(\neg p\vee\neg q)\wedge(r\rightarrow p)\wedge(s\rightarrow p)]\rightarrow(\neg r\vee\neg s)$
18. Ley de exportación:
    $[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[(p\rightarrow(q\vee r)]$
19. Ley de resolución:
    $[(\neg p\vee q)\wedge(p\vee r)]\rightarrow(q\vee r)$
20. Ley del bicondicional:
    $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$
21. Condicional-disyuncion:
    $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$

22. Condicional-conjunción:
    $(p\rightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)$
23. Leyes de simplificación:
    $(p\wedge q)\rightarrow p$
    $p\rightarrow(p\vee q)$
24. Leyes de expansión:
    $(p\rightarrow q)\leftrightarrow[p\leftrightarrow(p\wedge q)]$
    $(p\rightarrow q)\leftrightarrow[q\leftrightarrow(p\vee q)]$
25. Modus ponendo ponens:
    $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$
26. Modus tollendo tollens:
    $[(p\rightarrow q)\wedge\neg q]\rightarrow\neg p$

<u>Reglas de Gentzen</u>

1. Introducción de la negación (RI$\neg$):
   S
   $\underline{R\wedge\neg R}$
   $\neg S$

2. Eliminación de la negación (RE$\neg$):
   $\underline{\neg\neg S}$
   S
3. Introducción de la disyunción (RI$\vee$):
   $\underline{S\quad\;}$
   $S\vee R$
4. Eliminación de la disyunción (RE$\vee$):
   $S\rightarrow T$
   $\underline{R\rightarrow T\qquad}$
   $(S\vee R)\rightarrow T$
5. Introducción de la conjunción (RI$\wedge$):
   S
   $\underline{R\quad\;}$
   $S\wedge R$
6. Eliminación de la conjunción (RE$\wedge$):
   $\underline{S\wedge R}$ $\qquad$ $\underline{S\wedge R}$
   S $\qquad\qquad$ R
7. Introducción del condicional (RI$\rightarrow$):
   S
   $\underline{R\quad\;}$
   $S\rightarrow R$
8. Modus Ponens o eliminación del condicional (RE$\rightarrow$):
   $S\rightarrow R$
   $\underline{S\quad\;}$
   R

Eliminación de la Tautología:

I.	$(p\vee\neg p)\leftrightarrow T$	IX.	$(T\wedge A)\leftrightarrow A$
II.	$(p\wedge\neg p)\leftrightarrow A$	X.	$(A\wedge T)\leftrightarrow A$
III.	$(p\leftrightarrow p)\leftrightarrow T$	XI.	$(A\wedge A)\leftrightarrow A$
IV.	$(p\leftrightarrow\neg p)\leftrightarrow A$	XII.	$(T\wedge T)\leftrightarrow T$
V.	$(p\wedge A)\leftrightarrow A$	XIII.	$(T\vee A)\leftrightarrow T$
VI.	$(p\vee T)\leftrightarrow T$	XIV.	$(A\vee T)\leftrightarrow T$
VII.	$(p\wedge T)\leftrightarrow p$	XV.	$(A\vee A)\leftrightarrow A$
VIII.	$(p\vee A)\leftrightarrow p$	XVI.	$(T\vee T)\leftrightarrow T$

Lógica de predicados de primer orden:

- $\forall xPx \equiv \neg\exists x(\neg Px)$
- $\exists xPx \equiv \neg\forall x(\neg Px)$

A. Enunciado universal afirmativo: $\forall xPx$ (Todos los x son P).
B. Enunciado universal negativo: $\forall x(\neg Px)$ (Ningún x es P).
C. Enunciado particular afirmativo: $\exists xPx$ (Algún x es P).
D. Enunciado particular negativo: $\exists x(\neg Px)$ (Algún x no es P).
E. Enunciado universal afirmativo: $\forall xPx$ (Todos los x son P).

‘$\forall$’ es una extensión de ‘$\wedge$’ y ‘$\exists$’ es una extensión de ‘$\vee$’, para dominios no finitos:
$\forall xPx \equiv Pa\wedge Pb\wedge Pc...$;
$\exists xPx \equiv Pa\vee Pb\vee Pc...$;

Sistema axiomático en Lógica de Predicados:

1. $P\vee P\rightarrow P$
2. $Q\rightarrow(P\vee Q)$
3. $(P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P)$
4. $(P\rightarrow Q)\rightarrow[(R\vee P)\rightarrow(R\vee Q)]$
5. Ley de especificación: $\forall xPx\rightarrow Pa$
6. Ley de introducción del generalizador: $\forall x(p\rightarrow Px)\rightarrow(p\rightarrow\forall xPx)$

Leyes en lógica de predicados monádicos:

1. Leyes de interdeterminación de los cuantificadores:
   $\forall xPx\leftrightarrow\neg\exists x(\neg Px)$
   $\exists xPx\leftrightarrow\neg\forall x(\neg Px)$
   $\forall x(\neg Px)\leftrightarrow\neg\exists xPx$
   $\exists x(\neg Px)\leftrightarrow\neg\forall xPx$

2. Leyes aristotélicas de oposición:
   $\forall x(Px\to Qx)\leftrightarrow\neg\exists x(Px\wedge\neg Qx)$
   $\forall x(Px\to\neg Qx)\leftrightarrow\neg\exists x(Px\wedge Qx)$
   $\exists x(Px\wedge Qx)\leftrightarrow\neg\forall x(Px\to\neg Qx)$
   $\exists x(Px\wedge\neg Qx)\leftrightarrow\neg\forall x(Px\to Qx)$
3. Ley de identidad:
   $\forall x(Px\leftrightarrow Px)$
4. Ley de contradicción:
   $\forall x(\neg(Px\wedge\neg Px)$
5. Ley del tercio excluso:
   $\forall x(Px\vee\neg Px)$
6. Ley de distribución del cuantificador universal por la conjunción:
   $\forall x(Px\wedge Qx)\leftrightarrow(\forall xPx\wedge\forall xQx)$
7. Ley de distribución del cuantificador universal por el condicional:
   $\forall x(Px\to Qx)\to(\forall xPx\to\forall xQx)$
8. Ley de distribución del cuantificador universal por el bicondicional:
   $\forall x(Px\leftrightarrow Qx)\to(\forall xPx\leftrightarrow\forall xQx)$
9. Ley de contracción del cuantificador universal por la disyunción:
   $(\forall xPx\vee\forall xQx)\to\forall x(Px\vee Qx)$
10. Ley de distribución del cuantificador particular por la conjunción:
    $\exists x(Px\wedge Qx)\to(\exists xPx\wedge\exists xQx)$
11. Ley de distribución del cuantificador particular por la disyunción:
    $\exists x(Px\vee Qx)\leftrightarrow(\exists xPx\vee\exists xQx)$
12. Ley de contracción del cuantificador particular por el condicional:
    $(\exists xPx\to\exists xQx)\to\exists x(Px\to Qx)$
13. Ley de transitividad del condicional o ley del modo clásico del silogismo “Barbara”:
    $(\forall x(Qx\to Rx)\wedge\forall x(Px\to Qx))\to\forall x(Px\to Rx)$
14. Ley del modo clásico del silogismo “Celarent”:
    $(\forall x(Qx\to\neg Rx)\wedge\forall x(Px\to Qx))\to\forall x(Px\to\neg Rx)$
15. Ley del modo clásico del silogismo “Darii”:
    $(\forall x(Qx\to Rx)\wedge\exists x(Px\wedge Qx))\to\exists x(Px\wedge Rx)$
16. Ley del modo clásico del silogismo “Ferio”:
    $(\forall x(Qx\to\neg Rx)\wedge\exists x(Px\wedge Qx))\to\exists x(Px\wedge\neg Rx)$
17. Ley Modus Ponendo Ponens:
    $(\forall x(Px\to Qx)\wedge Pa)\to Qa$
18. Ley Modus Tollendo Tollens:
    $(\forall x(Px\to Qx)\wedge\neg Qa)\to\neg Pa$
19. Ley de inferencia de la alternativa:
    $(\forall x(Px\vee Qx)\wedge\neg Pa)\to Qa$
20. Ley de especificación:
    $\forall xPx\to Pa$
21. Ley de particularización:
    $Pa\to\exists xPx$
22. Ley de reducción al absurdo:
    $\forall x(\neg Px\to(Qx\wedge\neg Qx))\to\forall xPx$

Para predicados poliádicos: $\forall xy...$ es $\forall x\forall y...$; $\exists xy...$ es $\exists x\exists y...$

La contraria de $\forall x(Px\to Qx)$ es: $\neg\forall x(Px\to Qx)\equiv\exists x(Px\wedge\neg Qx)$

Ejemplo: $\forall xPx\to\exists xQx$

Contraria: $\neg\forall xPx\to\neg\exists xQx \equiv \exists x\neg Px\to\forall x\neg Qx$
Reciproca: $\exists xQx\to\forall xPx$ (Equivalente a la contraria)
Negación: $\neg(\forall xPx\to\exists xQx)$ *introducir* '¬': $\forall xPx\wedge\neg\exists xQx \equiv \forall xPx\wedge\forall x\neg Qx$

Sistema inferencial. Ej. Ley 17:

$$\frac{\forall x(Px\to Qx) \quad Pa}{Qa}$$

Reglas de inferencia:

1) Regla de eliminación del cuantificador universal (RE∀):
$\dfrac{\forall xPx}{Px}$ o $\dfrac{\forall x_1..x_nPx_1..x_n}{Px_1..x_n}$
2) Regla de introducción del cuantificador universal (RI∀):
$\dfrac{Px}{\forall xPx}$ o $\dfrac{Px_1..x_n}{\forall x_1..x_nPx_1..x_n}$
3) Regla de eliminación del cuantificador particular (RE∃):
$\dfrac{\exists xPx}{Pa}$ o $\dfrac{\exists x_1..x_nPx_1..x_n}{Pa_1..a_n}$ ('a': constante de Skolem.)
4) Regla de introducción del cuantificador particular (RI∃):
$\dfrac{Pa}{\exists xPx}$ o $\dfrac{Pa_1..a_n}{\exists x_1..x_nPx_1..x_n}$

Forma clausulada de la lógica de predicados

1. Aplicación de la equivalencia de las implicaciones con la disyunción y la conjunción:
   $(S\to R) \equiv (\neg S\vee R)$
   $(S\leftrightarrow R) \equiv (\neg S\vee R)\wedge(S\vee\neg R)$
2. Introducción de negaciones en las fórmulas:
   $\neg(S\vee R) \equiv (\neg S\wedge\neg R)$
   $\neg(S\wedge R) \equiv (\neg S\vee\neg R)$
   $\neg\exists x(Sx) \equiv \forall x(\neg Sx)$
   $\neg\forall x(Sx) \equiv \exists x(\neg Sx)$
3. Independencia de las variables cuantificadas:
   $\forall x(\neg Px\vee\exists xQx) \equiv \forall x(\neg Px\vee\exists yQy)$
4. Eliminación de los cuantificadores existenciales:
   - El cuantificador existencial no está dentro del alcance de ningún cuantificador universal:
     $\exists x(Px\wedge Rmx)$ se sustituye por: $Pa\wedge Rma$ (a 'a' se le llama constante de Skolem)
   - El cuantificador existencial está dentro del alcance de algún cuantificador universal:
     $\forall x(Px\to\exists yRyx)$ se sustituye por: $\forall x(Px\to Rf(x)x)$ ('f(x)' es una función de Skolem)
5. Eliminación de los cuantificadores universales.
6. Agrupamiento de conjunciones y disyunciones:
   Para llegar a una conjunción de clausulados se aplica la propiedad distributiva de conjunciones y disyunciones.
7. Cambio de nombre de las variables para que cada cláusula tenga las suyas propias.

Los pasos 4 y 5 pueden realizarse gracias a las siguientes reglas de inferencia, que son tautologías:

a) $(r\rightarrow\forall xPx) \leftrightarrow \forall x(r\rightarrow Px)$
b) $(r\rightarrow\exists xPx) \leftrightarrow \exists x(r\rightarrow Px)$
c) $\forall xPx\rightarrow r) \leftrightarrow \exists x(Px\rightarrow r)$
d) $\exists xPx\rightarrow r) \leftrightarrow \forall x(Px\rightarrow r)$
e) $\forall x(Px\wedge Qx) \leftrightarrow (\forall xPx\wedge\forall xQx)$
f) $\exists x(Px\vee Qx) \leftrightarrow (\exists xPx\vee\exists xQx)$
g) $\exists x(Px\rightarrow Qx) \leftrightarrow (\forall xPx\rightarrow\exists xQx)$
h) $\neg\forall xPx \leftrightarrow \exists x(\neg Px)$
i) $\neg\exists xPx \leftrightarrow\forall x(\neg Px)$
j) $(r\wedge\forall xPx) \leftrightarrow\forall x(r\wedge Px)$
k) $(r\wedge\exists xPx \leftrightarrow \exists x(r\wedge Px)$
l) $(r\vee\forall xPx \leftrightarrow\forall x(r\vee Px)$
m) $(r\vee\exists xPx \leftrightarrow \exists x(r\vee Px)$
n) $\forall xPx \leftrightarrow \forall yPy$
o) $\exists xPx \leftrightarrow \exists yPy$

Sustitución y unificación

Con las sentencias en forma clausurada, la forma de operar con la resolución es la misma que en lógica de proposiciones.
El procedimiento de aplicación de la regla de resolución más sencillo es la búsqueda exhaustiva, aplicando la regla de resolución a todas las parejas posibles y se añaden las resolventes obtenidas a las cláusulas restantes y se vuelve a aplicar la regla de resolución hasta que no se obtengan nuevas resolventes.
El proceso de sustitución y unificación de manera más general y precisa será:
Dadas unas variables $x_1,x_2,...,x_n$ y unos términos $t_1,t_2,..,t_n$ en los que no figuran las variables, llamaremos sustitución ‘s’ a un conjunto de pares ordenados

$s=\{t_1/x_1, t_2/x_2,..,t_n/x_n\}$ (‘t/x’ se lee ‘sustituir x por t’)

La operación de sustitución consiste en, dado un literal L que contiene las variables x_1, x_2, .., x_n, y unas sustitución s (cuyos términos no pueden contener símbolos de constantes ni de función que ya estén en L), reemplazar en todos los lugares de L donde aparezca x_1 por t_1, y con el resto de los pares t_i/x_i de s. El resultado ‘Ls’ es un caso de sustitución de ‘L’. Ejemplo:

L= Paxf(x)

$s_1=\{b/x, c/y\}$
$s_2=\{b/x, g(z)/y\}$
$s_3=\{z/x, w/y\}$

Ls_1=Pabf(c)
Ls_2=Pabf(g(z))
Ls_3=Pazf(w)

Un caso terminal de L será aquella que no contiene variables, ya que todas han sido sustituidas por constantes.
Existe la sustitución vacía {}, sobre cualquier expresión la deja invariable. Dadas dos sustituciones, s_1 y s_2, su composición, s_1s_2, es una sustitución tal que $Ls_1s_2=(Ls_1)s_2$.
La composición de sustituciones es asociativa

$(s_1s_2)s_3=s_1(s_2s_3)$

pero no conmutativa

$s_1s_2\neq s_2s_1$

No se puede calcular la composición resultante uniendo simplemente los conjuntos s_1 y s_2, hemos de aplicar primero s_2 a los términos de s_1 y después añadir los pares de s_2 cuyas variables no están entre los de s_1.
Una sustitución s es más general que otra s’ si esta se puede obtener de la s por composición con otra sustitución.

Dos expresiones son unificables si se pueden hacer idénticas por la aplicación de alguna sustitución s, a la que se denomina unificador.

Ls=L’s

Un conjunto de literales $L=\{L_1,L_2,..,L_n\}=\{L_i\}$ (i= 1, 2,.., n) es unificable si existe una sustitución s tal que

$L_1s = L_2s = ... = L_ns$

En tal caso se dice que s es un unificador de $L = \{L_i\}$ y que los literales L se unifican en L_is.

Ejemplo:

$\{L_i\}$={Paxf(y), Paxf(b)} un unificador sería ***s={c/x, b/y}***, ambos literales se unifican en **Pacf(b)**

Otro unificador diferente, más general sería ***σ = {b/y}***, Unificándose en **Paxf(b)**. En este caso se dice que σ es un unificador mínimo o de máxima generalidad (contiene un número mínimo de pares y liga un número mínimo de literales).

Un unificador mínimo tiene dos propiedades:

1) Si s es otro unificador de $\{L_i\}$ existe una sustitución s’ tal que s=σs’. L_is es un caso de $L_i\sigma$.
2) Liσ es único salvo por variantes alfabéticas de los literales.

Expresión general de la regla de resolución.

Se parte de un conjunto de cláusulas, en las que las variables libres de cada cláusula tienen nombre distinto. La regla de resolución se aplica a dos premisas en forma de cláusulas, que se denominan generatrices. Una contiene una variable (literal) negada que en la otra premisa está sin negar. La resolución consiste en construir otra cláusula (resolvente) formada por las disyunciones de todas las variables de las generatrices menos la común.

La aplicación se hará de la forma siguiente:

1) Se selecciona una pareja de literales en cláusulas distintas.
2) Se aplica el algoritmo de unificación a la pareja de literales seleccionada.
3) Si resultan unificadas, se resuelve y se incluye la resolvente en el conjunto.
4) Se vuelve a 1.

El proceso termina cuando no es posible encontrar cláusulas a unificar o cuando se obtiene la cláusula vacía como resolvente.

Refutación:

Su fundamento es la ley de reducción al absurdo.

Consiste en comprobar que el conjunto de cláusulas formado por las correspondientes premisas más la conclusión negada es una contradicción. Este hecho demuestra que la conclusión se infiere de las premisas.

$P1\wedge P2\wedge ...\wedge Pn\wedge\neg C$

Lógicas modales:

- Es posible que p: ♦p.
- Es imposible que p: ¬♦p
- Es necesario que p: ¬♦¬p (es imposible que no p).
- Es contingente: ♦¬ (no es necesario, es posible que no, no es imposible que no).

¬♦¬(p→q) : p⇒q (Implicación lógica o estricta)

¬♦¬(p↔q) : p⇔q (Equivalencia lógica o estricta)

Lógica de predicados con identidad:

= (se lee: 'es', 'es idéntico a', 'es igual a'.
≠ (se lee: 'es distinto de', 'es diferente de'.

Varios significados diferentes de '='.

1) $x=y\leftrightarrow\forall P(Px\leftrightarrow Py)$
2) $x=y\leftrightarrow\forall z(x\in z\leftrightarrow y\in z)$ (primera forma conjuntista)
3) $x=y\leftrightarrow\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)$ (segunda forma conjuntista)
4) $y=f(x)$; $(x,y)\in f$, $f\subset AxB$; AxB: $x\in A\wedge y\in B$
5) $y=f(x)$; $y=f(x)\leftrightarrow Pxy$
6) $x=y\leftrightarrow Rxy$ R es 'de equivalencia', R es reflexiva, simétrica y transitiva.
   $\forall xy(Rxy\rightarrow Ryx)$ simétrica.
   $\forall xyz((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz)$ transitividad.
   $\forall xy((Rxy\vee Ryx)\rightarrow(Rxx\wedge Ryy)$ reflexividad.
7) $x=x$; $U:\forall xUx$ ó $\forall xPx\leftrightarrow P=U$ $x\in U\leftrightarrow x=x$
   Conjunto vacío: $x\in\varnothing\leftrightarrow x\neq x$ $(\leftrightarrow\neg(x=x))$
8) Para definir un signo, a la izquierda de '=' se escribe el nombre, a la derecha el significado.
9) Axioma de la igualdad:
   i. $\forall x(x=x)$;
   ii. $\forall xy(x=y\rightarrow y=x)$;
   iii. $\forall xyz((x=y\wedge y=z)\rightarrow x=z)$

Varios sentidos de 'ser':

1) Ser de identidad, simbolizado por '='-
2) Ser de pertenencia, simbolizado por '∈'
3) Ser de inclusión, simbolizado por '⊂'
4) Ser de los predicados, implícito en el esquema 'Px'

El descriptor 'i' se usa x=iyPy (x es el y tal que Py).

Lógica de las clases:

Algebra booleana de las clases.

Algebra Booleana

I. Pertenencia:
   $x\in A$
II. No pertenencia:
   $\neg(x\in A)\leftrightarrow x\notin A$
III. Definición de una clase:
   $A\equiv\{x|A(x)\}$ (Clase de todos los x que verifiquen A(x)).
IV. Operaciones sobre Clases:
   - Inclusión: $A\subset B\equiv\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$
   - Identidad: $A=B\equiv\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$
   - Unión: $A\cup B\equiv\{x\mid(x\in A\vee x\in B)\}$
   - Intersección: $A\cap B\equiv\{x\mid(x\in A\wedge x\in B)\}$
   - Complemento: $\overline{A}\equiv\{x\mid x\notin A\}$

Propiedades:

1. Si A y B son clases, entonces $\overline{A}$, $A\cup B$ y $A\cap B$ son clases.

2. Clase vacía ($\varnothing$) y referencial (U) son elementos neutros:
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap U = A$
3. $A \cup \overline{A} = U$ (ley del tercio excluso en lógica de proposiciones)
   $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ley de contradicción en lógica de proposiciones)
4. Conmutativas:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
5. Asociativas:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. Ley de idempotencia:
   $A \cup A = A$
8. Leyes de absorción:
   $A \cup U = U$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$

Leyes del álgebra booleana paralelos a las de la lógica de proposiciones:

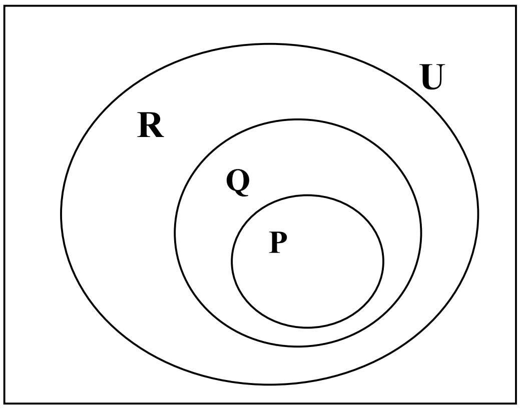
1. Ley de identidad:
   $A = A$
2. Ley de la doble negación:
   $\overline{\overline{A}} = A$
3. Ley del tercio excluso:
   $A \cup \overline{A} = U$
4. Ley de contradicción:
   $A \cap \overline{A} = \varnothing$
5. Leyes de Morgan:
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. Ley de reducción al absurdo:
   $(\overline{A} \subset B \cap \overline{B}) = A$

7. Leyes de conmutación:
   $(A \cup B) = (B \cup A)$
   $(A \cap B) = (B \cap A)$
   $(A = B) = (B = A)$
8. Leyes de asociación:
   $((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$
   $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$
   $((A = B) = C) = (A = (B = C))$

9. Leyes de transposición:
   $(A\subset B)=(\overline{B}\subset \overline{A})$
   $(A=B)=(\overline{B}=\overline{A})$
10. Leyes distributivas:
    $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
    $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$
    $A\subset(B\cap C)=(A\subset B)\cap(A\subset C)$
    $A\subset(B\cup C)=(A\subset B)\cup(A\subset C)$
11. Leyes de permutación:
    $(A\subset(B\subset C))=(B\subset(A\subset C))$
12. Ley del silogismo:
    $(A\subset B)\subset((B\subset C)\subset(A\subset C))$
13. Silogismo hipotético o transitividad:
    $[(A\subset B)\cap(B\subset C)]\subset(A\subset C)$
    $[(A=B)\cap(B=C)]\subset(A=C)$
14. Ley de inferencia de la alternativa o de los silogismos disyuntivos:
    $(\overline{A}\cap(A\cup B))\subset B$
    $(A\cap(\overline{A}\cup \overline{B}))\subset \overline{B}$
15. Ley del dilema constructivo:
    $[(A\cup B)\cap(A\subset C)\cap(B\subset C)]\subset C$
16. Segunda ley del dilema constructivo:
    $[((A\subset B)\cap(C\subset D))\cap(A\cup C)]\subset(B\cup D)$
17. Ley del dilema destructivo:
    $[(\overline{A}\cup \overline{B})\cap(C\subset A)\cap(D\subset B)]\subset(\overline{C}\cup \overline{D})$
18. Ley de exportación:
    $[(A\cap B)\subset C]=[A\subset(B\cup C)]$
19. Ley de resolución:
    $[(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup B)]\subset(B\cup C)$
20. Ley del bicondicional:
    $(A=B)=[(A\subset B)\cap(B\subset A)]$
21. Condsicional-disyunción:
    $(A\subset B)=(\overline{A}\cup B)$
22. Condicional-conjunción:
    $(A\subset B)=\left(\overline{A\cap \overline{B}}\right)$
23. Leyes de simplificación:
    $(A\cap B)\subset A$
    $A\subset(A\cup B)$
24. Leyes de expansión:
    $(A\subset B)=[A=(A\cap B)]$
    $(A\subset B)=[B=(A\cup B)]$
25. Modus ponendo ponens:
    $[(A\subset B)\cap A]\subset B$
26. Modus tollendo tollens:
    $[(A\subset B)\cap \overline{B}]\subset \overline{A}$

Diagramas de Euler:

$p \rightarrow q$
$\underline{q \rightarrow r}$
$p \rightarrow r$



Lógica de relaciones:

Equivalente a la lógica de predicados poliádicos, el modelo matemático es el álgebra de relaciones.
La definición de relaciones va unida a la de par ordenado (conjunto formado por dos elementos en el que se puede distinguir el primero del segundo) y a la de producto cartesiano.

$\forall xy((x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\})$
$\forall xyz(z\in(x,y)\leftrightarrow(\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x)\vee\forall t(t\in z\leftrightarrow(t=x\vee t=y))))$
$\forall xy((x,y)\in AxB\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B))$
Relación binaria: $xRy \equiv \{(x,y) \mid R(x,y)\}$

Algebra de las relaciones:

* Inclusión: $R\subset S \equiv \forall x\forall y(xRy\rightarrow xSy)$
* Identidad: $R=S \equiv \forall x\forall y(xRy\rightarrow xSy)$
* Unión: $R\cup S \equiv \{(x,y) \mid (xRy\vee xSy)\}$
* Intersección: $R\cap S \equiv \{(x,y) \mid (xRy\wedge xSy)\}$
* Complemento: $\overline{R} \equiv \{(x,y) \mid \neg(xRy)\}$
* - Relación recíproca o inversa: $R' \equiv \{(x,y) \mid (xRy)\}$
* - Composición: $RoS \equiv\{(x,y) \mid \exists z(xRz\wedge zSy)\}$
* - Dominio: $domR \equiv \{x \mid \exists y(xRy)\}$
* - Rango: $ranR \equiv \{y \mid \exists x(xRy)\}$

Así si H1 y H2 son el dominio y el rango de R, respectivamente, ($R\subset H1xH2$)
$RoA = \{x \mid x\in H1\wedge\exists y(xRy\wedge y\in H2\wedge y\in A)\}$
$AoR = \{y \mid y\in H2\wedge\exists x(x\in A\wedge x\in H1\wedge xRy)\}$

A raíz de las cuatro últimas operaciones (-) propias de las relaciones binarias se añaden otras leyes al álgebra de relaciones:

1. $xR'y\leftrightarrow yRx$
2. $(R=S)\leftrightarrow(R'=S')$
3. $(R\subset S)\rightarrow((RoQ)\subset(SoQ))$
4. $(R\cup S)oA=(RoA)\cup(SoA)$
5. $(R\subset S)\rightarrow(domR\subset domS)$
6. $(A\subset B)\rightarrow((RoA)\subset(RoB))$

Una relación es de orden, por antonomasia, si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva dadas por la sentencia:
$\forall xyz(Rxx\wedge((Rxy\wedge Ryx)\rightarrow x=y)\wedge((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz))$

(*)Lógica de predicados de orden superior o de segundo orden

Propiedades de los predicados de una lógica de segundo orden:

1. 'R es reflexiva' $\leftrightarrow$ $REF(R)\leftrightarrow\forall xy((Rxy\vee Ryx)\rightarrow(Rxx\wedge Ryy))$
2. 'R es simétrica' $\leftrightarrow$ $SIM(R)\leftrightarrow\forall xy(Rxy\rightarrow Ryx)$
3. 'R es transitiva' $\leftrightarrow$ $TRA(R)\leftrightarrow\forall xyz((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz)$
4. 'P es incompatible o intolerante con Q' $\leftrightarrow$ $INT(P,Q)\leftrightarrow\forall x(Px\rightarrow\neg Qx)$
5. 'P incluido en Q' $\leftrightarrow$ $INC(P,Q)\leftrightarrow P\subset Q\leftrightarrow\forall x(Px\rightarrow Qx)$
6. 'F es función de A en B' $\leftrightarrow$
   $FUN(F,A,B)\leftrightarrow\forall x(Ax\rightarrow(\exists y(By\wedge Fxy)\wedge\forall zt((Bz\wedge Bt\wedge Fxz\wedge Fxt)\rightarrow z=t)))$
7. 'G es la inversa de F' $\leftrightarrow$ $INV(G,F)\leftrightarrow\forall xy(Gxy\leftrightarrow Fyx)$
8. 'F es función biyectiva de A en B' $\leftrightarrow$
   $BIY(F,A,B)\leftrightarrow[FUN(F,A,B)\wedge\forall G(INV(G,F)\rightarrow FUN(G,B,A))]$
9. 'P es equinumérico con Q' $\leftrightarrow$ $EQN(P,Q)\leftrightarrow\exists F(BIY(F,F,Q))$
10. 'P es infinito' $\leftrightarrow$ $\exists QF(Q\neq P\wedge INC(Q,P)\wedge BIY(F,Q,P))$

Otros predicados de segundo orden:

a) Implicación material: $IMP(p,q)\leftrightarrow(p\rightarrow q)$
b) 'Se deduce de': $D(P,Q)$
c) 'P pertenece a o es elemento de Q': $(P\in Q)$
d) P es verdadero: $V(P)$; P es falso: $F(P)$; P es tautológico: $(TAUT(P)\leftrightarrow\exists Q(P\leftrightarrow(Q\vee\neg Q)))$; P es absurdo o contradictorio: $(ABS(P)\leftrightarrow\exists Q(P\leftrightarrow(Q\wedge\neg Q)))$.

Decidibilidad, consistencia y completitud:

1. La teoría T es indecidible $\leftrightarrow$ $\exists x(x\in T\wedge\neg Dx\wedge\neg D(\neg x))$
2. La teoría T es inconsistente $\leftrightarrow$ $\exists x(x\in T\wedge Dx\wedge D(\neg x))$
   $(DB\wedge D\neg B)\leftrightarrow D(B\wedge\neg B)$
   $(DB\vee D\neg B)\rightarrow D(B\vee\neg B)$
3. La teoría T es incompleta $\leftrightarrow$ $\exists x(x\in T\wedge\neg Dx)$

Lógicas polivalentes

Lógica trivalente, 3 valores: 1, 0, ½.

$\neg$p: 1-p; $\neg$1=0; $\neg$0=1 y $\neg$(½) = 1- ½ = ½ .

Las lógicas trivalentes no satisfacen la ley del tercio excluso: p$\vee\neg$p, ni la ley de contradicción: $\neg$(p$\wedge\neg$p), ni otras tautologías de lógica bivalente.

Definiciones de conectivas $\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ según Likasiewicz:

p	q	p$\wedge$q	p$\vee$q	p$\rightarrow$q	p$\leftrightarrow$q
0	0	0	0	1	1
0	½	0	½	1	½
0	1	0	1	1	0
½	0	0	½	½	½
½	½	½	½	1	1
½	1	½	1	1	½
1	0	0	1	0	0
1	½	½	1	½	½
1	1	1	1	1	1

La generalización de lógica trivalente:

1. Consideramos n valores lógicos racionales espaciados dentro del intervalo [01]
$$\left\{0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\}$$
2. Definimos las conectivas básicas de la siguiente forma:

   $\neg$p = 1-p

   p$\wedge$q = min(p,q)

   p$\vee$q = max(p,q)

   p$\rightarrow$q = min(1, 1+q-p)

   p$\leftrightarrow$q = 1-|p-q|

   p$\vee$q $\equiv$ (p$\rightarrow$q)$\rightarrow$q

   p$\wedge$q $\equiv$ $\neg$($\neg$p$\vee\neg$q) $\equiv$ $\neg$(($\neg$p$\rightarrow\neg$q)$\rightarrow\neg$q)

   p$\leftrightarrow$q $\equiv$ (p$\rightarrow$q)$\wedge$(q$\rightarrow$q) $\equiv$ $\neg$(($\neg$(p$\rightarrow$q)$\rightarrow\neg$(p$\rightarrow$p))$\rightarrow\neg$(p$\rightarrow$p))