Tema 1 Lógica de proposiciones y de predicados de primer orden. Lógica de proposiciones

Sintaxis

El alfabeto de la ***Lógica de Proposiciones*** debe proporcionar los símbolos necesarios para representar proposiciones sobre el mundo. Como el número de proposiciones que pueden manejarse en un mismo razonamiento no está limitado, debe proveer un número infinito de letras proposicionales.

Consta de los siguientes elementos:

1. Infinitas letras proposicionales: $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots$
2. Símbolos lógicos: constantes ($\bot,\top$), conectiva monaria ($\neg$) y conectivas binarias ($\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$)
3. Dos símbolos auxiliares de puntuación: *paréntesis izquierdo* '(' y *derecho* ')'.

En las exposiciones teóricas, el número de letras proposicionales que se consideran simultáneamente es pequeño (por ejemplo, de p_0 a p_8). En estos caso se suelen notar informalmente con las últimas letras del alfabeto latino: $\{p, q, r, s, t, \ldots\}$.

En la siguiente tabla se adjunta el nombre usual de cada conectiva y su lectura:

	$\bot,\top$	Enunciado Falso, Verdadero	
Negación	$\neg$	No p	$\neg p$
Conjunción	$\wedge$	p y q	$(p \wedge q)$
Disyunción	$\vee$	p o q	$(p \vee q)$
Condicional	$\rightarrow$	Si p entonces q	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	p si y sólo si q	$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

Semántica de las conectivas

p	q	¬p	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tablas de verdad

Si interesa conocer cómo se comporta globalmente la fórmula habrá que estudiarla frente a toda asignación posible. La tabla de verdad es una enumeración completa del valor de la fórmula para cada asignación distinta. A este tipo de tablas se le denomina tabla de verdad de la fórmula.

A una ***fórmula verdadera*** para toda interpretación se le denomina ***tautología***.

A una ***fórmula falsa*** para toda interpretación se le denomina ***contradicción***.

A las ***fórmulas*** que no son ni tautología ni contradicción se las suele denominar ***contingentes***.

Satisfacibilidad

Una interpretación satisface una o varias fórmulas cuando éstas se evalúan como verdaderas en esa interpretación o línea.

Sobre la tabla de verdad, cualquier "***línea***" (***interpretación***) donde una fórmula se evalúa como 1 satisface esa fórmula.

Una interpretación satisface a un conjunto de fórmulas si todas ellas presentan valor 1 en esa misma línea.

La satisfacibilidad es la posibilidad de ser satisfecho por alguna interpretación.

Basta que ***al menos exista una línea*** donde se satisfaga simultáneamente ese conjunto de fórmulas para afirmar que es ***satisfacible***.

Si un conjunto o una fórmula no es satisfacible se denominará ***insatisfacible***.

Las ***fórmulas insatisfacibles*** también se denominan ***contradicciones.***

En la **tabla de verdad 1**, la primera fórmula por la izquierda es insatisfacible, una contradicción. Las dos restantes son satisfacibles. De estas dos fórmulas satisfacibles, una resulta ser verdadera en toda interpretación y la otra no.

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge \neg (q \vee r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Tabla 1: Una fórmula insatisfacible y dos satisfacibles

En la **tabla de verdad 2**, ese conjunto de tres fórmulas es satisfacible. Existe ***al menos*** una línea donde todas las fórmulas tienen el valor 1.

El conjunto de fórmulas de la tabla 1.8 se satisface simultáneamente en 5 líneas.

- Si se eliminase una de las fórmulas, el conjunto resultante se satisfaría en un número igual o mayor de líneas.
- Si se añadiese una fórmula cualquiera, el conjunto resultante se satisfaría en un número igual o menor de líneas.

p	q	r	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$	$r \rightarrow (r \vee p)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Tabla 2: El conjunto $\Gamma = \{p \rightarrow (q \vee r), (p \wedge q) \vee r, r \rightarrow (r \vee p)\}$ es satisfacible

La **tabla 3** corresponde a un conjunto de fórmulas insatisfacible.

p	q	r	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$\neg (r \vee p)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

Tabla 3: El conjunto $\Omega = \{p \rightarrow (q \vee r), (p \wedge q), \neg (r \vee p)\}$ es insatisfacible

El método más directo para decidir la satisfacibilidad de una fórmula o de un conjunto consiste en recorrer todas las interpretaciones de la tabla de verdad, hasta producir:

- **Un resultado afirmativo** es satisfacible, basta encontrar la primera interpretación satisfactoria.
- **Un resultado negativo** no es satisfacible hay que recorrer todas las interpretaciones posibles.

Si en un conjunto de fórmulas aparecen ***n*** letras proposicionales, el número de interpretaciones distintas es 2^n.

Validez

Una fórmula válida es aquélla que es verdadera frente a cualquier interpretación.

Las tautologías son fórmulas válidas.

La satisfacibilidad divide en dos al conjunto de fórmulas: en insatisfacibles y satisfacibles.

Este último conjunto también se divide en dos: fórmulas tautológicas y fórmulas contingentes.

Observe que:

- Si niega una fórmula insatisfacible, la fórmula resultante es una tautología.
- Si niega una tautología, la fórmula resultante es insatisfacible.
- Si niega una fórmula contingente, la fórmula resultante es contingente.
- Si niega una fórmula satisfacible, la fórmula resultante puede ser satisfacible o no serlo, tan sólo se puede afirmar que no será tautología.

Notación: Para expresar que una fórmula φ es válida se utilizará la notación $\vDash \varphi$.

Para ***decidir la validez de una fórmula***, el procedimiento semántico extensivo requiere recorrer toda la tabla de verdad.

Los resultados negativos se pueden obtener más rápidamente: basta encontrar la primera interpretación que no satisface la fórmula.

Consecuencia

Una descripción informal de *"**ser consecuencia lógica de**"* es:

Todas las líneas donde las fórmulas denominadas ***premisas*** son verdaderas necesariamente la última, denominada ***conclusión***, también lo es.

En este ejemplo, $(q \vee r)$ ***es consecuencia lógica*** del conjunto de fórmulas $\{(\neg p \vee q), (p \vee r)\}$, a las que denominaremos ***premisas*** o ***hipótesis***.

p	q	r	$\neg p \vee q$	$p \vee r$	$q \vee r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Tabla 4: Consecuencia $\{(\neg p \vee q), (p \vee r)\} \vDash (q \vee r)$

Para representar que Ψ es consecuencia lógica de $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ se suele emplear la notación $\Phi \vDash \Psi$, ó $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \Psi$. Es también usual omitir las llaves del conjunto: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \Psi$.

Cuando no se cumple la relación de consecuencia se denota tachando el símbolo: $\Phi \nvDash \Psi$.

En ***Lógica de Proposiciones*** donde el número de interpretaciones distintas es finito, ***la relación de consecuencia lógica*** se puede decidir mediante el siguiente procedimiento:

- Se forma la tabla de verdad de las premisas y la conclusión y se comprueba que siempre que las premisas toman el valor de verdad "1" también la conclusión toma el valor "1".
- Para mostrar que no es ***consecuencia lógica*** basta encontrar un caso en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Absolutamente cualquier fórmula verifica que es ***consecuencia lógica*** de un conjunto de fórmulas, ***premisas,*** insatisfacible.

Equivalencias

Dos fórmulas, φ y Ψ, son equivalentes si $\varphi \vDash \Psi$ y $\Psi \vDash \varphi$.

Sobre la tabla de verdad, dos fórmulas equivalentes tienen exactamente los mismos valores de verdad sobre cada línea.

Escribiremos $\varphi \equiv \Psi$ cuando ambas fórmulas sean equivalentes y $\varphi \not\equiv \Psi$ cuando no lo sean.

Cualquier ***relación binaria*** que es ***reflexiva, simétrica y transitiva*** se le denomina ***relación de equivalencia***. Tiene las siguientes propiedades:

- Reflexividad: $\varphi \equiv \Psi$
- Simetría: si $\varphi \equiv \Psi$ entonces $\Psi \equiv \varphi$
- Transitividad: si $\varphi \equiv \Psi$ y $\Psi \equiv \chi$ entonces $\varphi \equiv \chi$

Dadas dos fórmulas, φ y Ψ, son equivalentes si y sólo si la fórmula $\varphi \leftrightarrow \Psi$ es una tautología.

Equivalencias	Nombre
$p \vee \neg p \equiv \top$ $p \wedge \neg p \equiv \bot$	Ley del medio excluido Ley de contradicción
$p \vee \bot \equiv p$ $p \wedge \top \equiv p$ $p \vee \top \equiv \top$ $p \wedge \bot \equiv \bot$	Leyes de identidad
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes de idempotencia
$\neg\neg p \equiv p$	Ley de doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$	Leyes asociativas
$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$	Leyes distributivas
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ $p \leftrightarrow q \equiv (\neg q \leftrightarrow \neg p)$ $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$ $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	Leyes de transposición
$(\neg p \to (q \vee \neg q)) \leftrightarrow p$	Reducción al absurdo

Formas normales

Una ***forma normal disyuntiva*** es aquella que está escrita como una disyunción de conjunción de literales.

$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$

Una forma normal disyuntiva es una contradicción si y sólo si cada una de sus conjunciones incluye una letra negada y no negada.

Una ***forma normal conjuntiva*** es aquella que está escrita como una conjunción de disyunciones de literales.

$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

Una forma normal conjuntiva es una tautología si y sólo si cada una de sus disyunciones incluye una letra negada y no negada.

Forma clausulada

Un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Son literales cada una de las siguientes seis expresiones: $p, q, \neg r, \neg p, \bot, \neg\top$.

No son literales las expresiones: $\neg\neg p, r \vee q, \neg(p \wedge q)$.

A cada literal $\boldsymbol{l}$ le corresponde un literal complementario $\boldsymbol{l^c}$.

Una fórmula como la siguiente está en forma normal conjuntiva:

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee r \vee p) \wedge (r \vee q)$

A toda fórmula proposicional se le puede hacer corresponder una fórmula normal conjuntiva equivalente.

1. ***Eliminar los bicondicionales***, si los hubiera: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
2. ***Eliminar los condicionales***, si los hubiera, mediante el reemplazo: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
3. ***Introducir todas las negaciones*** hasta que afecten a fórmulas atómicas:

   $\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
4. ***Eliminar las dobles negaciones***:

   $\neg\neg p \equiv p$
5. ***Reubicar correctamente las conjunciones y disyunciones***:

   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Lógica de Predicados Monádicos

Sintaxis

El alfabeto de un lenguaje de Primer Orden incluye:

- Símbolos comunes:
  - variables: $Var = \{x, y, z \ldots\}$
  - conectivas: $\{\bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - cuantificadores: $\{\forall, \exists\}$
  - símbolos de puntuación: paréntesis y comas
  - símbolo de igualdad: $\{\approx\}$
- Símbolos propios:
  - un conjunto de constantes: $\mathcal{C} = \{a, b, \ldots\}$
  - un conjunto de funciones: $\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$
  - un conjunto de relaciones: $\mathcal{R} = \{R, S, \ldots\}$

Se utilizan como constantes las letras iniciales del alfabeto latino $\{a,b,c,d,\ldots\}$, las letras finales como variables $\{\ldots,u,v,w,x,y,z\}$ y letras intermedias $\{f,g,h,\ldots\}$ como funciones. Para las relaciones se usarán letras mayúsculas $\{R, S, \ldots\}$.

Si queremos expresar los enunciados con una estructura interna necesitamos añadir una colección de posibles propiedades ***P***, ***Q***, ***R***, ***S***,…, son predicados monádicos, son cosas que se dicen sobre un determinado elemento sobre los que diremos algo $\{a,b,c,d,\ldots\}$.

P sola sin ningún elemento *a*, *b*,… no es una fórmula, no podemos evaluarla como verdadera o falsa.

Pa, ***Qb***, ya es una fórmula atómica con una estructura.

Semántica

Una interpretación de una frase debe contener información suficiente para determinar si la frase es verdadera o falsa.

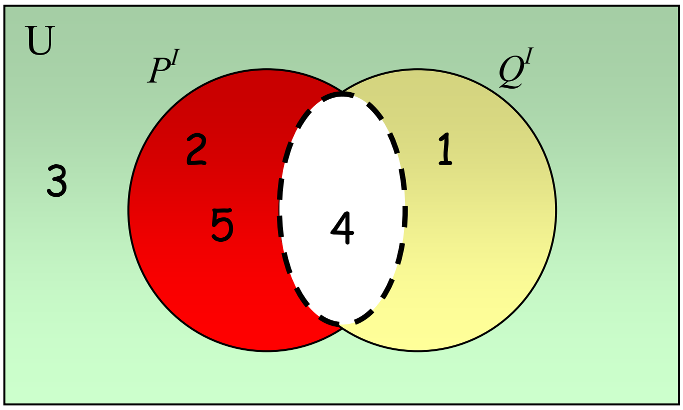
Formalmente, una interpretación de una expresión lógica contiene los siguientes componentes:

1. seleccionar un conjunto U no vacío, cualquiera.
2. Por cada predicado monádico, como *P(x)*, debe escoger un subconjunto de U.
3. Cada interpretación de este lenguaje debe fijar qué subconjuntos del universo son P^I y Q^I y qué elementos del universo son a^I, b^I y c^I.
4. Buscar que elementos tienen la propiedad ***P***, ***Q***,…
5. Debemos valorar si la fórmula completa es verdadera o falsa.

Ejemplos de Lógica de Predicados Monádicos

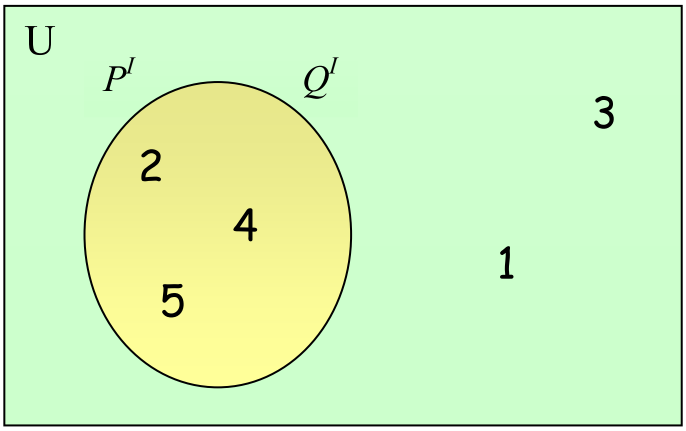
$U = \{1,2,3,4,5\};\ P^I = \{2,4,5\};\ Q^I = \{1,4\};\ a^I = 1;\ b^I = 4$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{F} \wedge \mathbf{V}$	**F**
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F}$	**F**
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$	**V**
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{V}$	**F**



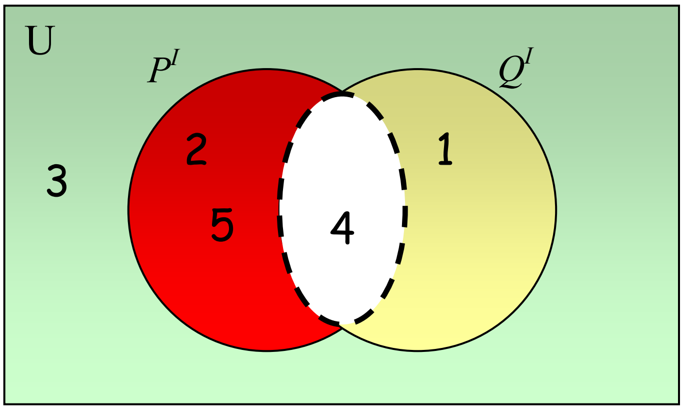
$U = \{1,2,3,4,5\};\ P^I = \{2,4,5\};\ Q^I = \{2,4,5\};\ a^I = 1;\ b^I = 4$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{F} \wedge \mathbf{V}$	**F**
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F}$	**F**
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$	**V**
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{V}$	**F**



$U = \{1,2,3,4,5\};\ P^I = \{2,4,5\};\ Q^I = \{1,4\};\ a^I = 4;\ b^I = 4$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}$	**V**
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{V} \vee \mathbf{F}$	**V**
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$	**V**
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{V}$	**V**



Sintaxis de los cuantificadores

Al cuantificador $\forall$ "***para todo***" se le denomina universal.

Al cuantificador $\exists$ "***existe***", existencial.

Además vamos a trabajar con el conjunto de las variables: $\{x, y, z...\}$, que nos van a servir para completar el cuantificador y rellenar los términos de un predicado monádico, diádico, etc.

Las constantes no pueden completar un cuantificador.

Variables libres y ligadas

Si una fórmula es de la forma $(\forall x\varphi)$ o $(\exists x\varphi)$ se dice que φ es el ámbito de ese cuantificador.

Todas las apariciones de una variable x, en el ámbito de un cuantificador para esa variable, $(\forall x\varphi)$ o $(\exists x\varphi)$, se denominan ligadas.

En una fórmula sin cuantificadores ninguna variable está ligada.

Todo cuantificador liga, a lo sumo, las apariciones de una variable en su ámbito.

Semántica de los cuantificadores

$U = \{1,2,3,4,5\}$; $P^I = \{2,3,5\}$;

$\forall xPx$ representa la frase "***todos los elementos tienen la propiedad P***". ***Px*** tenemos que evaluarlo para todas las opciones posibles del universo. Para cualquier interpretación que tenga que hacer verdadera esta fórmula necesariamente todos los elementos del universo tienen la propiedad ***P.*** Es una fórmula falsa para este universo e interpretación.

$\forall x\neg Px$ representa la frase "***ningún elemento tiene la propiedad P***".

$\neg\forall xPx$ esta fórmula es verdadera donde $\forall xPx$ es falsa. Podría representar las frases "***no todos tienen la propiedad P***".

$\exists xPx$ representa la frase "***hay algún elemento del universo que tiene la propiedad P***". Es sólo verdadera en las estructuras en que ***P*** sea distinto del vacío. Si al menos una asignación de la variable ***x*** hace verdadera ***Px*** entonces $\exists xPx$ es verdadero. Es una fórmula verdadera para este universo e interpretación.

$\exists x\neg Px$ representa la frase "***no todos tienen la propiedad P***". Para que esta fórmula sea verdadera basta que exista un elemento que tenga la propiedad $\neg P$, que esté "*fuera del conjunto P*".

$\neg\exists xPx$ representa la frase "***ningún elemento tiene la propiedad P***".

$\forall x(Px\wedge Qx)$ representa la frase "***todos los x tienen la propiedad P y la propiedad Q***".

$U = \{1,2,3,4\}$; $P^I = \{1,2\}$; $Q^I = \{1,2,3\}$; Resulta ser Falso.

$U = \{1,2,3,4\}$; $P^I = \{1,2,3,4\}$; $Q^I = \{1,2,3,4\}$; Resulta ser Verdadero.

$\forall x(Px\vee Qx)$ representa la frase "***todos los x tienen la propiedad P o bien la propiedad Q o ambas***".

$U = \{1,2,3,4\}$; $P^I = \{1,2\}$; $Q^I = \{1,2,3\}$; Resulta ser Falso.

$U = \{1,2,3,4\}$; $P^I = \{1,2,4\}$; $Q^I = \{1,2,3\}$; Resulta ser Verdadero.

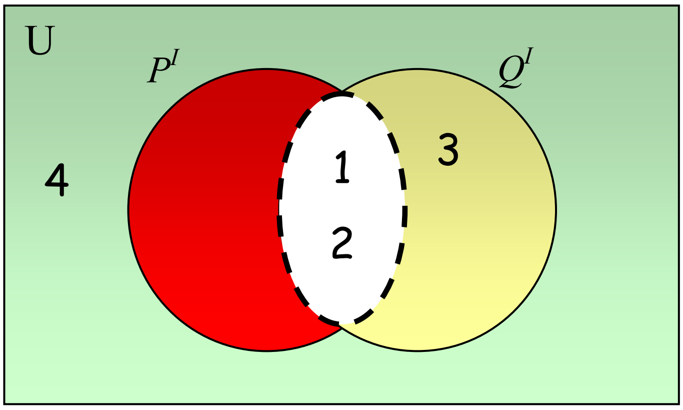
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$ representa la frase "***todos los P son Q"***, en tres de las cuatro regiones marcadas puede haber elementos sin que esta fórmula sea falsa, basta que haya un elemento en $P\overline{Q}$, que haga verdadero el antecedente y falso el consecuente, para que se evalúe como ***falso*** todo el bucle.

Observe que una estructura en que ***P*** no tenga elementos también satisface esta fórmula. ***No se requiere que P tenga*** **elementos,** ***pero, si los tiene, deben estar en la región PQ***. Es decir, la fórmula se hace verdadera donde P⊂Q es verdadero. Esta fórmula puede leerse "***todos los P son Q***".

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Verdadero.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2,4}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Falso. Hay un elemento en $P\overline{Q}$.

U	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	
1	**V→V**	**V**
2	**V→V**	**V**
3	**F→V**	**V**
4	**F→F**	**V**



$\exists x(Px \wedge Qx)$ esta fórmula es verdadera en las estructuras donde ***al menos un elemento pertenece a P y ese mismo elemento pertenece también a Q***. Es decir, cuando la intersección de ambos conjuntos no sea vacía.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Verdadero.

U = {1,2,3,4}; P^I = {2}; Q^I = {3}; Resulta ser Falso. No hay ningún elemento en ***PQ***.

$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ esta fórmula es verdadera en las estructuras donde ***al menos un elemento pertenece a P y ese mismo elemento NO pertenece a Q***.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Falso.

U = {1,2,3,4}; P^I = {2}; Q^I = {1,3}; Resulta ser Verdadero.

$\exists x \neg(Px \wedge Qx)$ esta fórmula es verdadera en las estructuras donde ***al menos un elemento NO pertenece a P y ese mismo elemento NO pertenece a Q***.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Verdadero.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2,3,4}; Q^I = {1,2,3,4}; Resulta ser Falso.

$\exists x(Px \vee Qx)$ esta fórmula es verdadera en las estructuras donde ***al menos un elemento pertenece a P o ese mismo elemento pertenece también a Q***. Podrían estar situados en cualquiera de las 3 regiones que comprende la unión P∪Q, que no debe ser vacía.

U = {1,2,3,4}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2,3}; Resulta ser Verdadero.

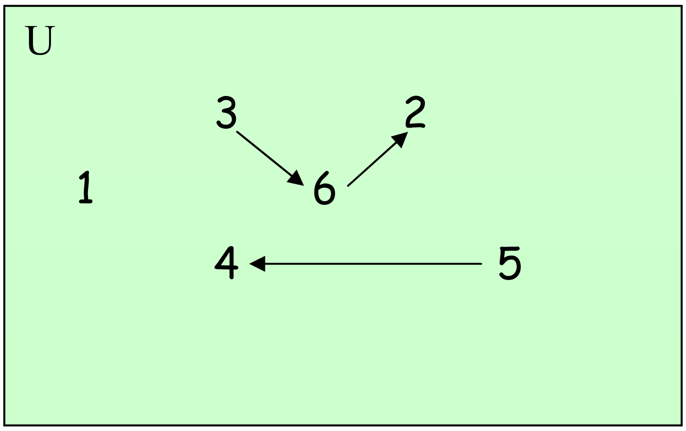
U = {1,2,3,4}; P^I = {2}; Q^I = {3}; Resulta ser Verdadero. Hay al menos un elemento en P∪Q.

Lógica de Predicados Diádicos

Sintaxis

Rab, es una relación de ***a*** a ***b*** donde tenemos que decidir si existe tal relación.

U = {1,2,3,4,5,6}; $R^I = \{(3,6),(5,4),(6,2)\}$; $a^I = 6$; $b^I = 2$; Se cumple.
U = {1,2,3,4,5,6}; $R^I = \{(3,6),(5,4),(6,2)\}$; $a^I = 2$; $b^I = 6$; No se cumple.
U = {1,2,3,4,5,6}; $R^I = \{(3,6),(5,4),(6,2)\}$; $a^I = 1$; $b^I = 6$; No se cumple.
U = {1,2,3,4,5,6}; $R^I = \{(3,6),(5,4),(6,2)\}$; $a^I = 3$; $b^I = 3$; No se cumple.



Ejemplos de Lógica de Predicados Diádicos

U = {1,2,3,4,5,6,7};

$\neg \boldsymbol{R}aa$; $a^I = 6$ Resulta ser Falso.

$\neg \boldsymbol{R}aa$; $a^I = 4$ Resulta ser Verdadero.

$\boldsymbol{R}ab \wedge \neg \boldsymbol{R}ab$; $a^I = 4$; $b^I = 2$ Resulta ser Falso.

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a^I = 4$; $b^I = 2$ Resulta ser Falso.

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a^I = 1$; $b^I = 5$ Resulta ser Verdadero.

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a^I = 6$; $b^I = 6$ Resulta ser Verdadero.

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a^I = 3$; $b^I = 5$ Resulta ser Verdadero.

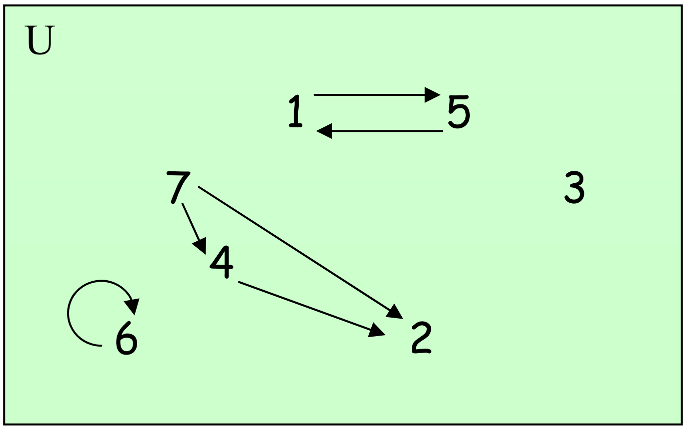
$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a^I = 4$; $c^I = 2$ Resulta ser Verdadero.

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a^I = 1$; $c^I = 5$ Resulta ser Falso.

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a^I = 6$; $c^I = 6$ Resulta ser Falso.

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a^I = 3$; $c^I = 5$ Resulta ser Verdadero.

$(\boldsymbol{R}ab \wedge \boldsymbol{R}bc) \rightarrow \boldsymbol{R}ac$; $a^I = 7$; $b^I = 4$; $c^I = 2$ Resulta ser Verdadero.



$\forall x\boldsymbol{Rax}$**,** para que esta interpretación sea verdadera, la interpretación tiene que ser tal que ***a*** tiene que estar relacionado con todos los elementos ***x*** del universo.

U = {1,2,3,4,5}; R^I = {(1,3) (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5)}; $a^I = 2$; Se cumple.

U = {1,2,3,4,5}; R^I = {(1,3) (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5)}; $a^I = 3$; No se cumple.

$\forall x\boldsymbol{Rxa}$**,** para que esta interpretación sea verdadera, la interpretación tiene que ser tal que todos los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionados con ***a***.

$\exists x\boldsymbol{Rax}$**,** para que esta interpretación sea verdadera, la interpretación tiene que ser tal que ***a*** tiene que estar relacionado con al menos uno de los elementos ***x*** del universo.

$\exists x\boldsymbol{Rxa}$**,** para que esta interpretación sea verdadera, la interpretación tiene que ser tal que al menos uno de los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionado con ***a***.

$\exists y\forall x\boldsymbol{Ryx}$ para que esta interpretación sea verdadera, al menos un elemento ***y*** del universo debe de estar relacionado con todos los elementos ***x*** del universo.

U = {1,2,3,4}; R^I = {(1,5),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)}; Se cumple.

$\exists x\forall y\boldsymbol{Rxy}$, tenemos que determinar si existe al menos un elemento ***x*** que esté relacionado con todos los valores de ***y***.

Informalmente se puede leer como "***existe al menos una fila x para toda columna y tal que la casilla (x,y) pertenece a la relación***".

U = {1,2,3,4}; R^I = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,2)}; Se cumple.

	1	2	3	4
1	●	●	●	●
2			●	
3		●		
4		●		

$\exists x\exists y\boldsymbol{Rxy}$, al menos un elemento ***x*** del universo debe de estar relacionado con un elemento ***y*** del universo.

U = {1,2,3}; R^I = {(2,3)}; Se cumple.

$\forall x\exists y\boldsymbol{Rxy}$, para todos los valores de ***x*** debe de existir al menos un valor de ***y***.

Informalmente se puede leer como "***para toda fila x existe una columna y tal que la casilla (x,y) pertenece a la relación***".

U = {1,2,3}; R^I = {(1,2),(2,2),(3,1)}; Se cumple.

$\forall x\forall y\boldsymbol{Rxy}$, todos los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionados con todos los elementos ***y*** del universo.

U = {1,2,3}; R^I = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}; Se cumple.

∃y∀xRxy "***existe una columna y tal que, para toda fila x sobre esa columna***", la casilla pertenece a la relación. Observe que esta fórmula es la que se obtiene de $\forall x \exists y Rxy$ permutando los cuantificadores: ***no son equivalentes***, no es lo mismo decir "***todo el mundo quiere a alguien***" que "***alguien es querido por todo el mundo***".

Ejemplos permutando los cuantificadores

U = {1,2,3};

$\forall y \exists x Rxy$

SI
SI
NO
NO

•	•	•

$R = \{(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\exists x \forall y Rxy$

SI
NO
NO
NO

•		•
	•	

$R = \{(1,1),(1,3),(3,2)\}$

$\exists x \forall y Ryx$

NO
NO
NO
SI

•		•
•		

$R = \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$

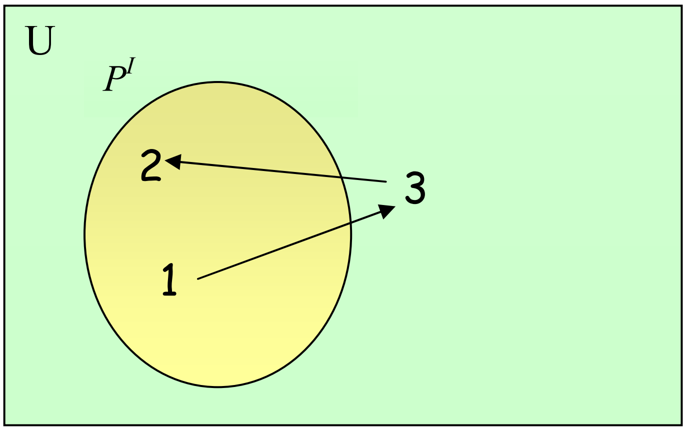
	•	
	•	
	•	

$R = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

$\forall x(Px \wedge \exists y Rxy)$

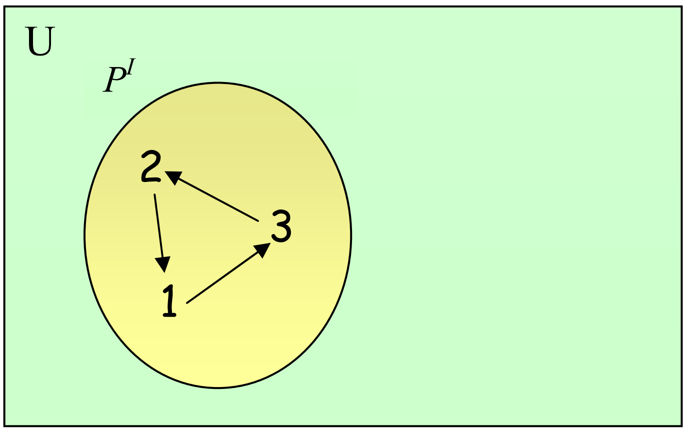
U = {1,2,3}; $P^I = \{1,2\}$; $R^I = \{(1,3),(3,2)\}$; Resulta ser Falso.

U	$\forall x(Px \wedge \exists y Rxy)$	**F**
1	**V∧V**	**V**
2	**V∧F**	**F**
3	**F∧V**	**F**



U = {1,2,3}; $P^I = \{1,2,3\}$; $R^I = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$; Resulta ser Verdadero.

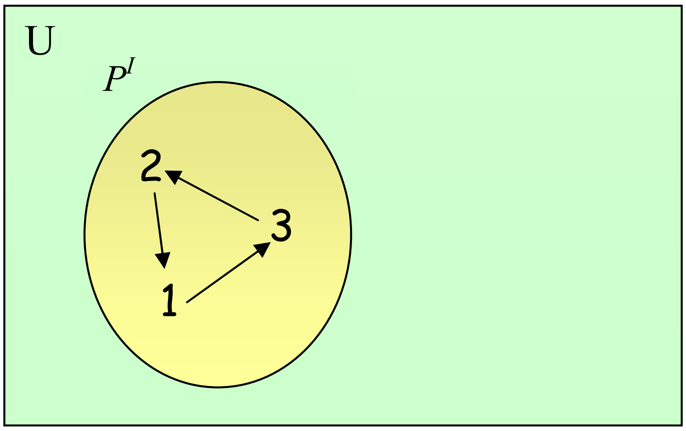
U	$\forall x(Px \wedge \exists y Rxy)$	**V**
1	**V∧V**	**V**
2	**V∧V**	**V**
3	**V∧V**	**V**



$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$

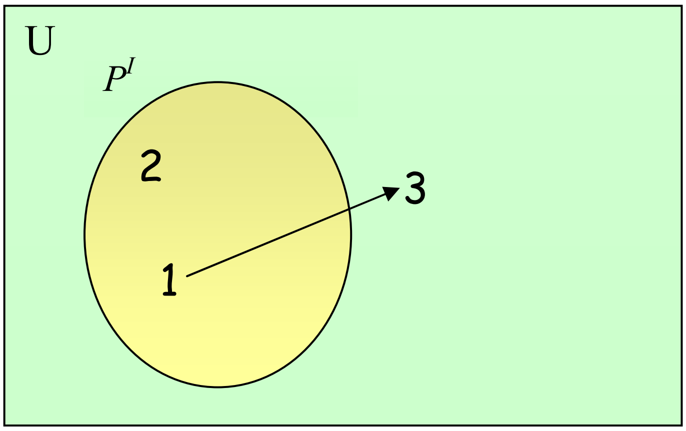
U = {1,2,3}; P^I = {1,2,3}; R^I = {(1,3),(2,1),(3,2)}; Resulta ser Verdadero.

U	$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$	V
1	V→V	V
2	V→V	V
3	V→V	V



U = {1,2,3}; P^I = {1,2}; R^I = {(1,3)}; Resulta ser Falso.

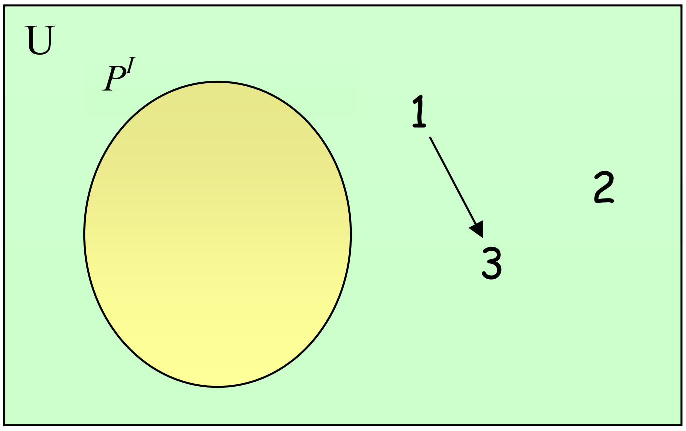
U	$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$	F
1	V→V	V
2	V→F	F
3	F→F	V



Esta fórmula no obliga a que haya elementos en ***P***, pero en el caso que los haya debe de cumplirse el consecuente.

U = {1,2,3}; P^I = {∅}; R^I = {(1,3)}; Resulta ser Verdadero.

U	$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$	V
1	F→V	V
2	F→F	V
3	F→F	V



Funciones

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Px} \lor \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$

U = {1,2,3}; P^I = {1,2}; Q^I = {1,2}; $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, que se podía haber escrito como f={(1,3),(2,2),(3,2)}. Resulta ser Verdadero.

$\exists$xRx f(c) Esta fórmula podría representar la sentencia "***todo el mundo quiere a la madre de Juan***".

$\exists$xR *f(x)x* Esta fórmula podría ser una versión simbólica de la expresión ***"mi mamá me mima***": para toda persona, su madre quiere a esa persona.

Identidad

Tratamos con predicados diádicos cuyos elementos se relacionan exclusivamente consigo mismo.

I*ab*

U = {1,2,3}; I = {(1,1),(2,2),(3,3)}; Resulta ser Verdadero.

•		
	•	
		•

Una forma para hacer la negación es: $\neg$***I****ab;* $\neg(a = b)$; $a \neq b$;

Satisfacibilidad

Una **fórmula** es **satisfacible** si existe algún universo, interpretación y asignación donde sea verdadera.

Un **conjunto** de **fórmulas** es **satisfacible** si existe algún universo, interpretación y asignación donde coincidan todas en ser verdaderas.

También podemos decir que un conjunto de fórmulas es satisfacible si, y sólo si, la fórmula conjunción de todas ellas es satisfacible.

Otra forma de definir la satisfacibilidad es:

Un **conjunto** de **predicados** es **satisfacible** si existe algún modelo para el que todos los predicados sean verdaderos.

Un **conjunto** de **predicados** es **insatisfacible** si no existe ningún modelo para el que todos los predicados sean verdaderos, es decir, si cualquier modelo hace que alguno de los predicados sea falso.

Consecuencia

En todas las líneas en que las fórmulas denominadas ***premisas*** coinciden en ser verdaderas la consecuencia también lo es.

Diremos que C es consecuencia lógica de X,Y y Z. {X, Y, Z} $\vDash$ C;

Otra forma de hacerlo es así, ***las premisas implican lógicamente a la conclusión***: $X \land Y \land Z \rightarrow C$

A partir de una relación de ***consecuencia*** se construye un conjunto que necesariamente es ***insatisfacible***.

Validez

Una fórmula es válida si se satisface para todo universo, toda interpretación y asignación.

Una fórmula es válida si y sólo si su negación es insatisfacible. Un conjunto de fórmulas es satisfacible si y sólo si la fórmula conjunción de todas ellas es satisfacible.

Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Φ si en toda estructura $\langle U,I \rangle$ y asignación en que todas las fórmulas de Φ sean verdaderas también lo es φ. Se expresará entonces como $\Phi \vDash \varphi$.

Equivalencias

Dos fórmulas φ y Ψ son ***equivalentes*** si $\varphi \vDash \Psi$ y $\Psi \vDash \varphi$.

Sobre la tabla de verdad, dos fórmulas equivalentes tienen exactamente los mismos valores de verdad sobre cada línea.

Escribiremos $\varphi \equiv \Psi$ cuando ambas fórmulas sean equivalentes y $\varphi \not\equiv \Psi$ cuando no lo sean.

$$\forall x Px \equiv \forall y Py$$

$$\neg \forall x Px \equiv \exists x \neg Px$$

$$\neg \exists x Px \equiv \forall x \neg Px$$

Forma prenexa

La forma normal prenexa es una expresión que tiene todos los cuantificadores desplazados a la parte delantera de la expresión.

Una expresión está en forma normal prenexa si no hay cuantificadores en el ámbito de las conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Toda expresión puede transformarse en forma normal prenexa siguiendo estos pasos:

- Eliminar todas las apariciones de $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ de la expresión.
- Desplazar todas las negaciones hacia el interior de modo que al final las negaciones sólo aparezcan como partes de literales.
- Normalizar todas las variables.
- La forma normal prenexa se puede obtener desplazando todos los cuantificadores a la parte delantera de la expresión.

Encontrar la forma normal prenexa de $\forall x\left(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y) \rightarrow \neg\left(\exists y R(x,y) \wedge P\right)\right)$

Primero eliminamos $\rightarrow$ $\quad \forall x\left(\neg\left(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)\right) \vee \neg\left(\exists y R(x,y) \wedge P\right)\right)$

Desplazamos las negaciones $\quad \forall x\left(\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y) \vee \forall y \neg R(x,y) \vee \neg P\right)$

Se normalizan los cuantificadores $\quad \forall x\left(\forall y_1 \neg R(x,y_1) \vee \exists y_2 S(x,y_2) \vee \forall y_3 \neg R(x,y_3) \vee \neg P\right)$

Se desplazan los cuantificadores $\quad \forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \left(\neg R(x,y_1) \vee S(x,y_2) \vee \neg R(x,y_3) \vee \neg P\right)$

La confirmación de insatisfacibilidad: Tableaux

Si desea comprobar que una fórmula es ***consecuencia*** de otras, niéguela e incorpórela a esas otras.

Si este nuevo conjunto resulta ***insatisfacible***, efectivamente existía aquella relación de consecuencia.

1. Se utilizan para decidir la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas; indirectamente, para decidir la relación de consecuencia entre una fórmula y un conjunto: niegue aquélla e incorpórela al conjunto inicial analizado
2. Se construye un primer árbol, con una sola rama, que consta de tantos nodos como fórmulas haya en el conjunto inicial
3. Las ramas se pueden bifurcar si es de tipo β (disyuntiva) o ampliar linealmente si es de tipo α (conjuntiva), los nodos añadidos son subfórmulas adecuadas negadas o no de una fórmula en esa rama
4. Una rama es satisfacible si lo es el conjunto de todas sus fórmulas.
5. Si entre ellas se encuentran tanto una fórmula como su negación, la rama es insatisfacible.
6. Un árbol es satisfacible si lo es alguna de sus ramas
7. El árbol inicial es tan satisfacible como los sucesivos árboles ampliados; así, si se detecta que alguno de ellos es insatisfacible, también lo era el conjunto inicial de fórmulas

Notación uniforme

Conjuntiva		Disyuntiva	
α	α_1 α_2	β	β_1 β_2
$X \wedge Y$	X Y	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$ $\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$ $\neg Y$	$X \vee Y$	X Y
$\neg(X \rightarrow Y)$	X $\neg Y$	$X \rightarrow Y$	$\neg X$ Y
$\neg(X \leftarrow Y)$	$\neg X$ Y	$X \leftarrow Y$	$\neg X$ $\neg Y$
$\neg(X \uparrow Y)$	X Y	$X \uparrow Y$	$\neg X$ $\neg Y$
$X \downarrow Y$	$\neg X$ $\neg Y$	$\neg(X \downarrow Y)$	X Y
$X \nrightarrow Y$	$\neg X$ $\neg Y$	$\neg(X \nrightarrow Y)$	$\neg X$ Y
$X \nleftarrow Y$	$\neg X$ Y	$\neg(X \nleftarrow Y)$	X $\neg Y$

Reglas de expansión γ y δ

Universales		Existenciales	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall xX$ $\neg\exists xX$	$X(t)$ $X(t)$	$\exists xX$ $\neg\forall xX$	$X(a)$ $X(a)$

Todas ellas producen una expansión del árbol en un sólo nodo. No producen bifurcación del árbol.

Se obtiene una fórmula omitiendo el cuantificador principal.

Es lo que se conoce como instancia por sustitución de esta subfórmula.

El párrafo siguiente expone cuáles pueden ser las cadenas sustituyentes.

Parámetros. Cada lenguaje de primer orden fija sus propias constantes y funciones. Si se pretende que el lenguaje sirva, por ejemplo, para razonar sobre números naturales, debe incluir una constante (que se asignará al 0) y una función (la función sucesor).

Regla de expansión γ.

Los nodos "universales", pueden reutilizarse, expandirse en todas las ramas a las que pertenezcan cuantas veces se desee. Se puede escoger en su expansión cualquier constante, utilizada anteriormente o no, estratégicamente, conviene utilizar constantes ya empleadas, para cerrar ramas.

Las fórmulas γ son del tipo $\forall x\phi$ ó $\neg\exists x\phi$. Su expansión es un único nodo de la forma $\phi\,(x/p)$ o $\neg\phi\,(x/p)$ respectivamente, donde todas las apariciones libres de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo término t. Este término debe ser cerrado: no debe incluir variables, sólo constantes y funciones de L o constantes auxiliares.

Regla de expansión δ.

Deben utilizarse constantes no empleadas anteriormente, al menos no empleadas en esa rama.

Las fórmulas δ son del tipo $\exists x\phi$ ó $\neg\forall x\phi$. Su expansión es un único nodo de la forma $\phi\,(x/p)$ o $\neg\phi\,(x/p)$ respectivamente, donde todas las apariciones libres en ϕ de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo parámetro p. Este parámetro, esta constante auxiliar, debe ser nueva en el árbol: no puede figurar en ninguna fórmula previa (realmente, basta que sea nueva en la rama).

Cada instanciación debe hacerse sobre una constante nueva. De lo contrario, esta constante tendría unas propiedades (fijadas en otras fórmulas, donde aparece) que pueden modificar (innecesariamente) la decisión final sobre la satisfabilidad del conjunto.

Estratégicamente, siempre es preferible expandir primero las fórmulas proposicionales α y β, luego las existenciales (δ) y finalmente las universales (γ) para intentar cerrar.

Considere el siguiente conjunto de fórmulas.

X_1: $p \vee q$

X_2: $p \rightarrow r$

X_3: $q \rightarrow r$

X_4: r

Se pueden plantear, entre otras, las siguientes tres preguntas:

1. ¿Es consecuencia: $X_1, X_2, X_3 \vDash X_4$?
2. ¿Es insatisfacible $\{X_1, X_2, X_3, \neg X_4\}$?
3. ¿Es tautología $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \rightarrow X_4$?

Observe que, en general, la ***insatisfacibilidad*** de $\{X_1,X_2,X_3,\neg X_4\}$ implica que es efectivamente ***consecuencia*** $X_1,X_2,X_3 \vDash X_4$. Se puede afirmar que también son consecuencias $X_1,X_2,\neg X_4 \vDash \neg X_3$ ó $\neg X_4,X_2,X_3 \vDash \neg X_1$. Se Comprueba, sobre su tabla de verdad:

	X_1	X_2	X_3	X_4	$\neg X_4$
pqr	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	r	
000	0	1	1	0	1
001	0	1	1	1	0
010	1	1	0	0	1
011	1	1	1	1	0
100	1	0	1	0	1
101	1	1	1	1	0
110	1	0	0	0	1
111	1	1	1	1	0

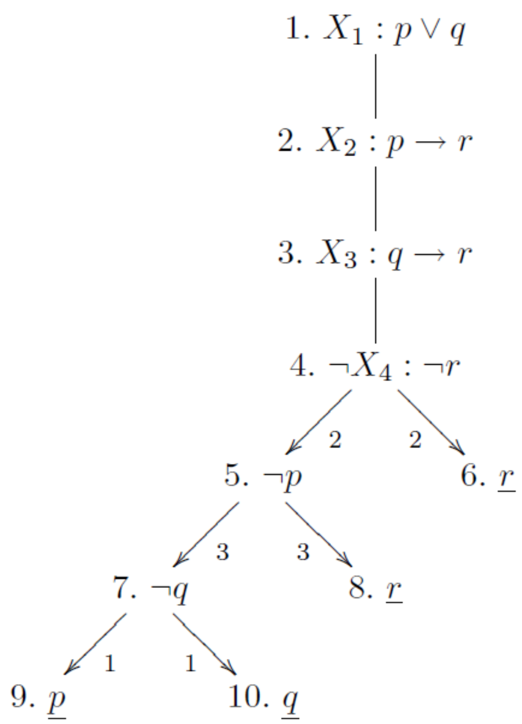


Figura 1: ejemplo ***insatisfacible*** $\{(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r), \neg r\}$

Comprobación de consecuencia: si se desea comprobar una relación de consecuencia, como $X_1,X_2,X_3 \vDash X_4$, hay que negar la supuesta consecuencia, X_4, antes de introducirla en el conjunto de nodos iniciales. De hecho, lo que el tableau comprueba es que un determinado conjunto, $\{X_1,X_2,X_3,\neg X_4\}$ en este caso, es insatisfacible.

Comprobación de insatisfacibilidad: suponga que en un examen la pregunta que se plantea es "¿es insatisfacible el conjunto de fórmulas Ω?", entonces hay que situar todas las fórmulas de Ω como nodos iniciales, sin manipular (negar) ninguna.

Contenido