Tema 3 Conjuntos, Relaciones y Funciones.

Conjuntos

Los **conjuntos** se representan con letras mayúsculas, A, B,C ,…
Los **elementos** se representas con minúsculas, a, b, c, x, y, z.

Relación de pertenencia:

- El elemento *a* pertenece al conjunto X, $a \in X$
- El elemento *a* no pertenece al conjunto Z, $a \notin Z$

Formas de definir un conjunto:

- Extensión: enumeramos todos y cada uno de los elementos.
- Comprensión: definimos alguna característica común a todos los elementos.

Conjunto definidos por ***extensión***:

S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
V = {a, e, i, o, u}

Conjunto definidos por ***compresión***:

S = {días de la semana}
V = {vocales del español}

Por comprensión podemos definir de la siguiente manera los conjuntos:

$$V = \left\{ x \in A \middle| x \text{ es vocal} \right\}$$

V es el conjunto de los elementos *x* que pertenecen al conjunto de las letras del alfabeto español *A*, tales que *x* es una vocal.

Relación de inclusión:
Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está incluido en B y se escribe A ⊂ B o A ⊆ B cuando todos los elementos de A pertenecen a B.
Si A está contenido en B se dice que A es un ***subconjunto*** de B o que A es una parte de B.

Si A no es subconjunto de B se denota como A ⊈ B.

Propiedades de la inclusión de conjuntos.

- **Reflexiva:** todo conjunto A está contenido en sí mismo. $A \subset A$.

- **Transitiva:** Si un conjunto A está contenido en otro B, y B está contenido en otro conjunto C, entonces A está contenido en C.
  Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces son ***iguales*** $A = B$.

Se dice que un conjunto A es un ***subconjunto propio*** de un conjunto B, denotado A ⊊ B, si $A \subset B$ y $A \neq B$.

Si un conjunto A es subconjunto de un conjunto B entonces se dice que B es un *superconjunto* de A.

Se denota como B ⊃A, ó B ⊇A. Si B no es superconjunto de A entonces lo denotamos como B ⊉ A.

Conjunto universal, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos que se analizan en un determinado contexto y se representa por *U*.

Conjunto vacío es un conjunto que no tiene elementos, se representa por $\varnothing$.

Cualquiera que sea el conjunto A se cumple $\varnothing \subset A$.

Operaciones con conjuntos.

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los comunes a ambos conjuntos, se representa por $A \cap B$.

Dos **conjuntos son disjuntos** si no tienen elementos comunes, $A \cap B = \varnothing$.

La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los que pertenecen a alguno de los conjuntos, se representa por $A \cup B$.

El **conjunto complementario** de A está formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A, se representa por ∼A.

La **diferencia** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, se representa por A \ B.

La diferencia de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de A con el complementario de B, se representa por A \ B = A ∩∼B.

Sea un conjunto *S*. Se denomina ***partición*** de *S* a una colección de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tales que todos son distintos de $\varnothing$, la unión da como resultado *S*, y cada par de conjuntos S_i y S_j, con $i \neq j$, son disjuntos.

Diagramas de Venn

Los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados diagramas de Venn. El conjunto universal lo representamos por un rectángulo y los conjuntos por círculos dentro del conjunto universal.

Resumen de las propiedades de los conjuntos

Propiedad	Nombre
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativa
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Conmutativa
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributiva
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotencia
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorción
$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$	De De Morgan
$\sim (\sim A) = A$	Doble negación
$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$	Identidad
$A \cup \sim A = U$	Complemento
$A \cap \sim A = \varnothing$	Exclusión
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Leyes de dominación
$\sim U = \varnothing$	Complementación
$\sim \varnothing = U$	Complementación

Producto cartesiano

Una relación es un conjunto de parejas ordenadas.
Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, R es una relación de A en B sí y sólo sí R es un subconjunto de ***AxB***.
El **producto cartesiano** de dos conjuntos es una operación que resulta en otro conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse tomando el primer elemento del par del primer conjunto, y el segundo elemento del segundo conjunto.

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$, su producto cartesiano es:

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

Conjuntos potencia

Sea A un cierto conjunto, el ***conjunto potencia*** de A, escrito como $P(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

Si el conjunto A tiene *n* elementos, el conjunto de las partes de A tiene 2^n elementos.

Construir el conjunto potencia de $A=\{a,b,c\}$.

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

Relaciones

Una relación de A en B es cualquier conjunto de pares $(x,y), x \in A$ e $y \in B$. Si $(x,y) \in R$, diremos que *x* es *R*-relacionado con *y*. Para expresar que *R* es una relación de A en B, escribiremos $R: A \leftrightarrow B$.
Forma de expresar las relaciones, notación lista: enumera todos los elementos de la relación, en forma de tabla, en forma de matriz, gráficamente formada por nodos y arcos.
Si (x,y) es un par, uno puede definir un predicado P_R para cada relación R que es verdadera si $(x,y) \in R$ y falsa en caso contrario, se expresa como Rxy. $Rxy \equiv (x,y) \in R$

Relación reflexiva

Una relación binaria R sobre X es reflexiva si, para cada $x \in X$, el par (x,x) está en la relación, por consiguiente R es reflexiva $\forall x(Rxx)$
El ejemplo más sencillo de una relación reflexiva es la relación identidad I_X, cuyos únicos elementos son (x,x), $x \in X$.
En algunos casos R no contiene ningún elemento del tipo (x,x), en este caso R se denomina no reflexiva (irreflexible).
La relación hermano es no reflexiva.
Si todos los nodos tienen un bucle entonces la relación es reflexiva.
La reflexividad es visible cuando una relación está dada en forma matricial.
Sea $M_R = [m_{ij}]$ la matriz de la relación R, entonces la diagonal principal de la matriz es el conjunto de todos los m_{ii}. Si todos los $m_{ii} = 1$ entonces la relación es reflexiva.
Si todos los $m_{ii} = 0$ entonces la relación es NO reflexiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es reflexiva

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es irreflexiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ninguna

Relación irreflexiva

Una relación binaria: **R**, entre los elementos de un conjunto: **A**, es una **relación irreflexiva**, también llamada: antirreflexiva o antirrefleja, si ningún elemento del conjunto está relacionado consigo mismo:

$\forall x \in$ A: $(x,x) \notin R$

Para todo *x* que pertenezca a **A**, **(***x***,** *x***)** no pertenece **R**.

Que también puede expresarse: $\neg\exists x \in$ A: $(x,x) \notin R$

No existe ningún elemento ***x*** en el conjunto **A** que cumpla que: **(*x*, *x*)** pertenezca a **R**.

Relaciones simétricas

Una relación R sobre un conjunto X es ***simétrica*** si para todos *x* e *y* perteneciente a X, *Rxy* implica *Ryx*, por consiguiente:

- R es simétrica $\forall x \forall y \left(Rxy \to Ryx \right)$

La relación hermano es simétrica.

Una relación R sobre X es ***antisimétrica*** si para todo $y \neq x$, *Rxy* excluye a *Ryx*, o sea si se alcanzan *Rxy* e *Ryx*, entonces *x* = *y*, por consiguiente:

- R es antisimétrica $\forall x \forall y \left(Rxy \wedge Ryx \to x = y \right)$

La relación “madre de” es antisimétrica.

En el dígrafo de una relación simétrica todos los arcos son bidireccionales.
Si la relación es antisimétrica ningún arco tiene un compañero que vaya en la dirección opuesta.

Sea $M_R = \left[m_{ij} \right]$ la matriz de la relación R, entonces la matriz es simétrica si y solo si $m_{ij} = m_{ji}$.
Una matriz es antisimétrica si y solo si $m_{ij} = 1$ obliga a que $m_{ji} = 0$. En las relaciones antisimétricas tanto m_{ij} como m_{ji} pueden ser 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Simétrica Antisimétrica Ninguna

Transitividad

Una relación R sobre un conjunto X es transitiva si para todo *x, y, z* en X siempre que *Rxy* e *Ryz*, entonces *x*R*z*, por consiguiente:
R es transitiva $\forall x \forall y \forall z \left(Rxy \wedge Ryz \to Rxz \right)$
Una relación es ***transitiva*** si y sólo si todos los pares de objetos que pueden ser alcanzados a través de un intermediario pueden también ser alcanzados directamente.

La transitividad se divide en dos grupos:

- Relaciones simétricas.
- Relaciones antisimétricas.

La relación de igualdad es la más importante de las relaciones simétricas transitivas.

Cierres

- El cierre reflexivo $R^{(r)}$ de una relación R es la relación reflexiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.
- El cierre simétrico $R^{(s)}$ de una relación R es la relación simétrica más pequeña que contiene a R como subconjunto.
- R^{+} de una relación R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.
- El cierre transitivo R^{*} de una relación R es la relación transitiva reflexiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.
- En resumen para obtener un cierre se añaden tan pocos elementos como sea posible para hacer a la relación en cuestión.

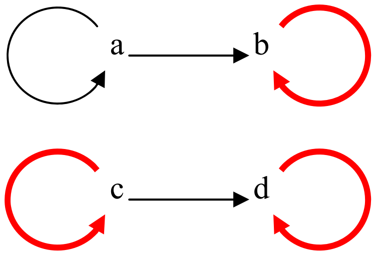
Consiste en hacer que una relación que no cumple una propiedad sí la cumpla.

Por ejemplo, el cierre reflexivo de {(a,b),(c,d),(a,a)}, definida en {a,b,c,d}, sería:

{(a,b),(c,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)}, pues la segunda relación sí es reflexiva.

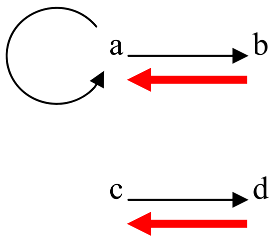
Para la misma relación, el cierre simétrico es {(a,b),(c,d),(a,a),(b,a),(d,c)}.

Cierre Reflexivo



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cierre Simétrico



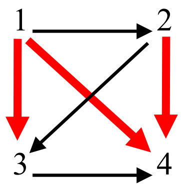
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sean

A = {1, 2, 3, 4}
R = {(1,2), (2,3), (3,4)}

Cierre transitivo: señale todos los pares que faltan para que esta relación sea transitiva

(1,3),(2,4),(1,4)



Relaciones de equivalencia

Una relación es una ***relación de equivalencia*** si y solo si es:

- Reflexiva.
- Simétrica.
- Transitiva.

La relación de equivalencia más importante es la de igualdad. Es Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Órdenes parciales

Las relaciones transitivas antisimétricas conducen a los órdenes parciales.
Existen dos tipos de órdenes parciales.
Una relación $R : S \leftrightarrow S$ se denomina un ***orden parcial débil*** *si es reflexiva, antisimétrica* y *transitiva*.
R se denomina ***orden parcial estricto*** *si es irreflexiva, es antisimétrica y es transitiva*.
Todos los órdenes parciales son no cíclicos.
Un conjunto A junto con un orden parcial R se denomina ***conjunto parcialmente ordenado*** o un ***cpo***. El *cpo* (A, R) es el conjunto A junto con el orden parcial R.
Un orden parcial R es un ***orden total*** o un ***orden lineal*** si y solo si para todos los x e y, $Rxy \vee Ryx$ es siempre verdadera. En este caso se llama al ***cpo*** (A, R) un conjunto totalmente ordenado o una cadena.
Un ***orden total*** implica que sea *reflexiva, antisimétrica y transitiva*.
Los órdenes parciales describen algún orden aún cuando no todos los elementos sean comparables.
Los órdenes parciales estrictos no pueden tener bucles.

Funciones

Las funciones son relaciones.
Toda función de A en B es una relación de A en B.
Una función entre dos conjuntos A y B es una transformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.
El conjunto A se llama conjunto inicial o dominio de la aplicación.
El conjunto B se llama conjunto final o rango de la aplicación.

La notación más común para indicar que el par (x, y) pertenece a alguna función *f* es $y = f(x)$.
Por lo tanto $(x, y) \in f$, $y = f(x)$ e $f : x \to y$ es lo mismo.

Ejemplo 6.1 ¿Cuáles de las siguiente relaciones de $A = \{a, b, c\}$ con $B = \{1, 2, 3, 4\}$ son funciones?

1. $f_1 = \{(a,3),(b,1),(c,2)\}$
2. $f_2 = \{(a,3),(b,3),(c,2)\}$
3. $f_3 = \{(a,3),(a,4),(b,1),(c,2)\}$
4. $f_4 = \{(a,3),(b,1)\}$

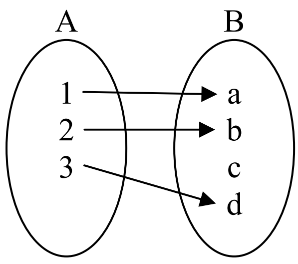
f_1 es función ya que cada *x* está relacionada con una *y*.
f_2 es función, aunque la imagen 3 está asociada con *a* y *b* no viola los requisitos de una función.
f_3 NO es función porque *a* se relaciona con 3 y 4.
f_4 NO es función porque no hay elemento relacionado con *c*.

Tipos de Funciones

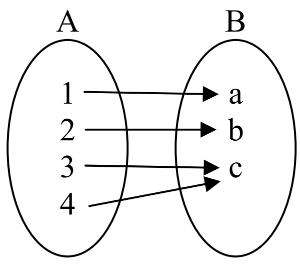
Una función $f : A \to B$ es ***inyectiva*** si a cada valor del *conjunto inicial* "A" le corresponde un valor distinto en el *conjunto final* B de *f*. Es decir, a cada elemento del *conjunto inicial* A le corresponde un solo valor del *conjunto final* B tal que, en el conjunto A no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

Una función $f : A \to B$ es, ***sobreyectiva*** cuando cada elemento de "B" es la imagen de como mínimo un elemento de "A".

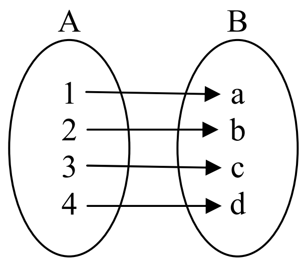
Una función $f : A \to B$ es, ***biyectiva*** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.



Inyectiva



Sobreyectiva

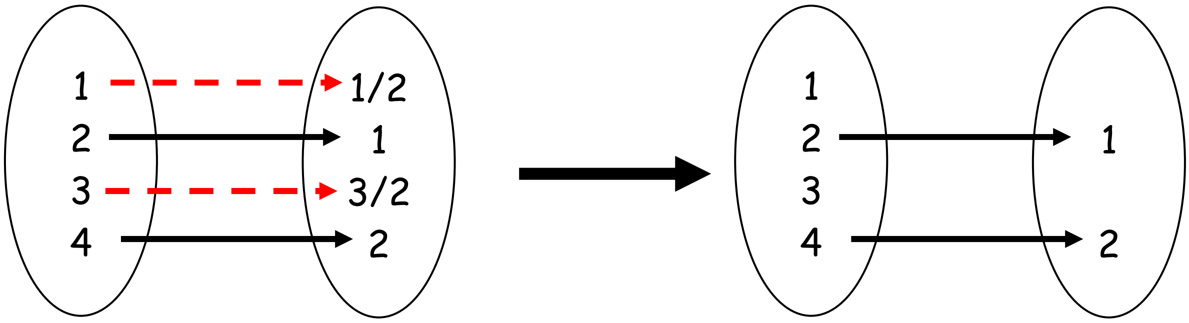


Biyectiva

Una relación f es una ***función parcial*** de X a Y si para todo $x \in X$ existe como máximo una $y \in Y$. Algunos elementos del espacio del dominio X pueden no tener su correspondiente $y = f(x)$.
En este caso el dominio puede ser un subconjunto propio del espacio del dominio.
Toda función es una función parcial.
NO toda función parcial es una función.

Ejemplo:

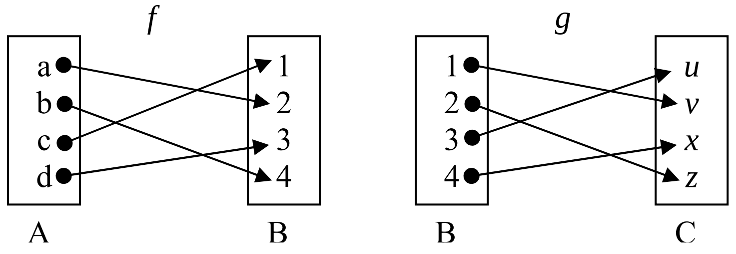
En el dominio de los números enteros, $f(x) = x/2$ es una función parcial, porque cuando x es impar no podemos asociar ninguna imagen, por lo tanto no es función sino una función parcial.



En el gráfico se ve que **1 y 3 no** tienen imagen en el dominio de los enteros, ya que ½ y 3/2 no pertenecen a los enteros.
La ***función identidad*** transforma cada valor en sí mismo, esto es $f(x) = x$.
La ***función constante*** tiene una sola imagen, por ejemplo c y todos los argumentos se refieren a la misma imagen, si f denota a la función constante se tiene: $f(x) = y$. La imagen de cada x es y.

Composición

Si tenemos dos funciones: *f(x)* y *g(x)*, de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de *f(x)* el valor de *g[f(x)]*.



$$a \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} z$$
$$b \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} x$$
$$c \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} v$$
$$d \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} u$$

$g \circ f$ es la composición de las funciones *f* y *g*.

Se lee *f* compuesta con *g*.

La composición de funciones es una operación asociativa, ***pero no es conmutativa***, se cumple que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Ejemplo: Encontrar $g \circ f$ si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2$

$$g(f(x)) = g(x+4) = (x+4)^2$$

Ejemplo: Encontrar $g \circ f$ y $f \circ g$ si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x$

$$g(f(x)) = g(x+3) = 2(x+3)$$
$$g \circ f(x) = 2(x+3)$$

$$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 3$$
$$f \circ g(x) = 2x + 3$$

Cardinalidad

El **cardinal** de un conjunto X es su número de elementos y se representa por |X|.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si dos conjuntos A y B son disjuntos, el cardinal de la unión es igual a la suma de los cardinales.

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Si A y B son dos conjuntos, siempre se cumple que el cardinal de su unión $(A \cup B)$ es igual al cardinal de A más el cardinal de B menos el cardinal de la intersección $(A \cap B)$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Podemos razonar la fórmula de otra manera:

$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$$

Tenemos que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, siendo $(A - B)\, y (A \cap B)$ disjuntos, por lo tanto:

- $|A| = |A - B| + |A \cap B|$
- $|B| = |B - A| + |A \cap B|$

Homomorfismos, automorfismos e isomorfismos

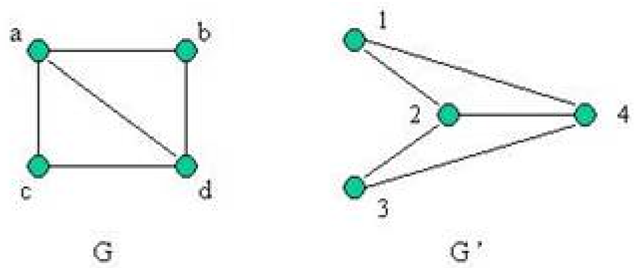
Sean dos funciones f:$X\to X$ y g:$Y\to Y$. Si existe una función h:$X\to Y$ tal que $g(h(x))=h(f(x))$ entonces se dice que f y g son *homomorfas*, y que h es un *homomorfismo.*

Sean dos funciones f:$X\to X$ y g:$Y\to Y$ que son homomorfas, y sea h su homomorfismo. Si h es biyectiva entonces se dice que f y g son isomorfas, y que h es un isomorfismo.

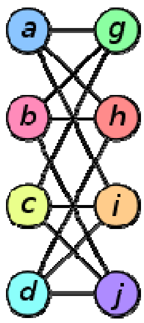
Sean dos funciones f:$X\to X$ y g:$Y\to Y$ que son homomorfosmas, y sea h su homomorfismo. Si $X=Y$ entonces se dice que f y g son endomorfas, y que h es un endomorfismo.

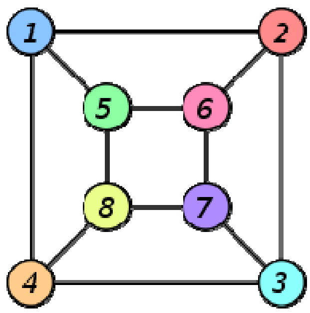
Sean dos funciones f:$X\to X$ y g:$Y\to Y$ que son isomorfosmas, y sea h su isomorfismo. Si $X=Y$ entonces se dice que f y g son automorfas, y que h es un automorfismo.

G y G´ se denominan isomorfos, y son matemáticamente iguales, solo varia la apariencia, o sea, que se mantienen las adyacencias, estructura, caminos y ciclos.



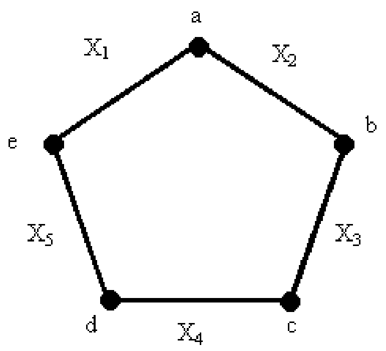
A pesar de su diferente aspecto, los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos:



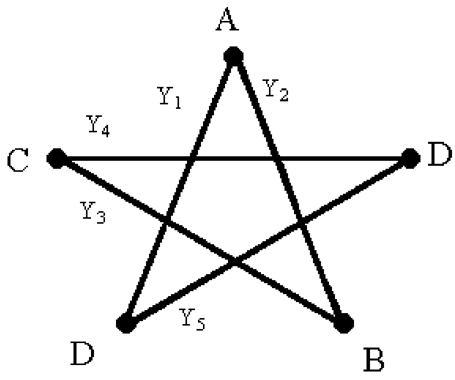


$f(a) = 1$;
$f(b) = 6$;
$f(c) = 8$;
$f(d) = 3$;
$f(g) = 5$;
$f(h) = 2$;
$f(i) = 4$;
$f(j) = 7$;

Sean los siguientes grafos $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$



G_1



G_2

Un isomorfismo para los grafos anteriores $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$ está definido por:
f (a) = A
f (b) = B
f (c) = C
f (d) = D
f (e) = E

y $g(X_i) = Y_i$, $i = 1, \dots, 5$

Los grafos $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$ son isomorfos si y solo si para alguna ordenación de vértices y lados sus matrices de incidencia son iguales. Veamos las matrices de incidencia de los grafos anteriores:

$$G_1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \qquad G_2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$