Tema 5 Árboles y Grafos.

Definiciones básicas de teoría de grafos.

Un grafo consta de un conjunto de *nodos*, un conjunto de *aristas* y una correspondencia *f* del conjunto de aristas al conjunto de nodos.
Si una arista se corresponde con un par ordenado, entonces se dice que es una ***arista dirigida***, en caso contrario es una ***arista no dirigida***.
Los pares de nodos que estén conectados por una arista dentro de un grafo se denominan ***nodos adyacentes***.
Un grafo en el que toda arista es dirigida se denomina ***digrafo o grafo dirigido***.
Un grafo en el que todas las aristas son no dirigidas se denomina ***grafo no dirigido***.
Si en un grafo hay aristas dirigidas y aristas no dirigidas se denomina ***mixta***.
Sea $G = (N, A)$ y sea $e \in A$ una arista dirigida asociada al par ordenado de nodos (u,v). Se dice que la arista e sale del nodo u o comienza en el nodo u y llega al nodo v o termina en el nodo v.
También se dice que los nodos u y v son los nodos inicial y Terminal de la arista e.
Una arista $e \in A$ que conecte los nodos u y v tanto si es dirigida como si no se dice que es incidente en los nodos u y v.
Una arista que conecte un nodo consigo misma se denomina ***bucle*** o ***lazo***.
En algunos grafos pueden existir ciertos pares de nodos que estén unidos por más de una arista, se denominan ***aristas paralelas***.
Todo grafo que contenga aristas paralelas se denomina ***multigrafo***.
Si no hay más de una arista entre pares de nodos se denomina ***grafo sencillo***.
Existen grafos en los que los números de las aristas muestran los pesos de éstas, se denominan ***grafos ponderados***.
En un grafo un nodo que no sea adyacente a ningún otro nodo se denominará ***nodo aislado***.
Un grafo que contenga solamente nodos aislados se denomina ***grafo nulo***.
En un grafo dirigido, para todo nodo v el número de aristas que tienen a v como nodo inicial se denomina grado de salida del nodo v.
El número de aristas que tienen a v como nodo terminal es lo que se denomina grado de entrada.
La suma del índice de entrada y el índice de salida es lo que se denomina *grado total del nodo v*.
La suma de los grados de todos los nodos de un grafo debe de ser un número par que será igual al doble del número de aristas que haya en el grafo.

Sea $N(H)$ el conjunto de nodos de un grafo H y sea $N(G)$ el conjunto de nodos un grafo G tales que $N(H) \subseteq N(G)$. Si además toda arista de H es también una arista de G, entonces se dice que el grafo H es un subgrafo del grafo G y esto se expresa en la forma $H \subseteq G$.
Un grafo $G = (N, A)$ es ***completo*** si todos sus nodos son adyacentes a todos los nodos del grafo, se denotan de la forma K_n
Un grafo sencillo $G = (N, A)$ se denomina grafo bipartito si N se puede descomponer en dos subconjuntos V_1 y V_2 tales que no haya dos nodos de V_1 que sean adyacentes ni tampoco dos nodos de V_2.
Sea $G = (N, A)$ un digrafo sencillo, toda arista de A se puede expresar por medio de un par ordenado de elementos de N, esto es $A \subseteq N \times N$.
Cualquier subconjunto de $N \times N$ define una relación sobre N.

Caminos, accesibilidad y conexiones.

Sea $G=(N,A)$ un digrafo sencillo, se dice que una sucesión de aristas es un ***camino*** de G si y solo si el nodo terminal de cada arista del camino es el nodo inicial de la próxima arista del camino, si lo hubiere.

Un camino recorre los nodos que aparecen en la sucesión, comenzando en el nodo inicial de la primera arista y finalizando en el nodo terminal de la última arista de la sucesión.

El número de aristas que aparecen en la sucesión de un camino se denomina ***longitud del camino***.

Un camino de un digrafo en el cual todas las aristas sean distintas se denomina ***camino sencillo***.
Un camino en el que todos los nodos sean diferentes se denomina ***camino elemental***.

Un camino que comienza y acaba en el mismo nodo se denomina ***ciclo***.
Ciclo sencillo, si ninguna arista del ciclo aparece más de una vez en el camino.
Ciclo elemental, si no pasa por ningún nodo más de una vez.

Un digrafo sencillo que no tenga ningún ciclo se denomina ***aclíclico***.

Sea $G=(N,A)$ un digrafo sencillo, entonces se define la relación de camino, C de G en la forma $C=\{(u,v)\}$ existe un camino del nodo *u* al nodo *v*.
Si un nodo *v* resulta alcanzable desde el nodo *u*, entonces un camino de longitud mínima que vaya de *u* a *v* se denomina camino de longitud mínima.
La longitud de un camino de longitud mínima del nodo *u* al nodo *v* se denomina ***distancia*** y se denota como *d(u,v)*. Se supone que *d(u,u)=0* para todo nodo *u*.
La ***longitud de un camino de un grafo*** es el número de aristas que aparecen en la sucesión del camino.
La ***alcanzabilidad*** es una relación binaria sobre el conjunto de los nodos de un digrafo sencillo.
La alcanzabilidad es reflexiva y transitiva, pero no necesariamente simétrica o antisimétrica.

La distancia *d(u,v)* desde un nodo *u* hasta un nodo *v* satisface las propiedades siguientes:

$$d(u,v)\geq 0$$
$$d(u,u)=0$$
$$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$$

La última igualdad se llama desigualdad triangular. Si no puede alcanzarse v desde u se escribe $d(u,u)=\infty$.
Si se puede alcanzar *v* desde *u* y *u* desde *v* entonces $d(u,v)$ no es necesariamente igual a $d(v,u)$.

En un digrafo sencillo la longitud de cualquier camino elemental es menor o igual que *n-1*, en donde *n* es el número de nodos que haya en el grafo, similarmente la longitud de cualquier ciclo elemental no sobrepasará *n*.
El número de ***nodos diferentes*** de cualquier camino elemental de longitud *k* es *k+1*.

En un grafo sencillo no dirigido, una sucesión $\langle v_1,v_2,...,v_d\rangle$ forma un camino si para $i=1,2,3...,d$ existe una arista no dirigida $\{v_{i-1},v_i\}$. Se dice que la arista $\{v_{i-1},v_i\}$ se encuentra en el camino.
La longitud del camino está dada por el número de aristas que haya en el camino y es *d-1*.
Si $v_1=v_d$ entonces el camino forma un ciclo.
Un ciclo sencillo en un grafo no dirigido es un ciclo sencillo que tiene que tener al menos tres aristas distintas y en donde solo se repite el nodo inicial y el nodo final de la sucesión.

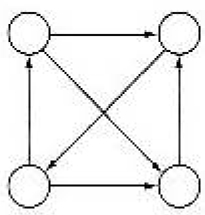
Se dice que un ***grafo no dirigido es conexo*** si para cualquier pareja de nodos del grafo se puede llegar hasta el otro nodo partiendo de cualquiera de ellos.

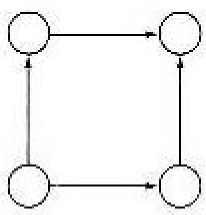
Un digrafo es ***conexo*** o ***débilmente conexo*** si es conexo como grafo codirigido, despreciando los sentidos de las aristas, es decir si se transforman las aristas dirigidas en aristas no dirigidas.

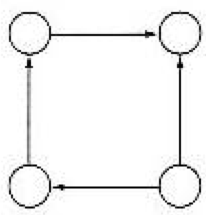
Un digrafo sencillo se dice ***unilateralmente conexo*** si para toda pareja de nodos del grafo al menos uno de los nodos de esa pareja se puede alcanzar desde el otro.

Si para toda pareja de nodos del grafo los dos nodos de la pareja se pueden alcanzar uno desde el otro, entonces se dice que el grafo es ***fuertemente conexo***.

Si un grafo es fuertemente conexo entonces es unilateralmente conexo.
Si un grafo es unilateralmente conexo entonces es débilmente conexo.
Un grafo no dirigido es débilmente conexo si y sólo si es unilateralmente conexo, y si y sólo si es fuertemente conexo.


Fuertemente conexo


Débilmente conexo
No Unilateralmente conexo

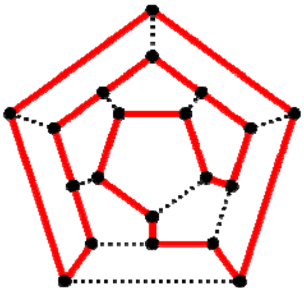

Unilateralmente conexo
No Fuertemente conexo

Sea $G=(N,A)$ un digrafo sencillo, y sea $X \subseteq N$, se dice que el subgrafo cuyos nodos están dados por el conjunto X y cuyas aristas son todas aquellas aristas de G que tengan sus nodos iniciales y finales en X es el ***subgrafo inducido*** por X.

Un subgrafo G_1 se denomina ***maximal*** con respecto a alguna propiedad si no hay ningún otro subgrafo que también posea esa propiedad y que incluya a G_1.
Para un digrafo sencillo los subgrafos maximales fuertemente conexos se denominan componentes fuertes.
Un subgrafo maximal unilateralmente conexo o un subgrafo maximal débilmente conexo se denominan componente unilateral o componente débil.
En un digrafo sencillo $G=(N,A)$, todo nodo del digrafo se encuentra exactamente en un componente fuerte.

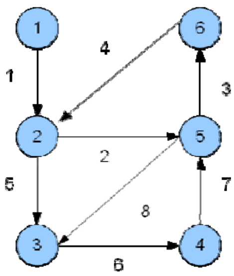
Tipos especiales de caminos

Un ***camino hamiltoniano*** en un grafo es una sucesión de aristas adyacentes que visita todos los vértices del grafo una sola vez.
Si además el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un ***ciclo hamiltoniano***.



Un ***ciclo euleriano*** es aquel camino que recorre todas las aristas de un grafo tan solo una única vez, siendo condición necesaria que regrese al vértice inicial de salida (ciclo = camino en un grafo donde coinciden vértice inicial o de salida y vértice final o meta).
Una definición más formal lo define como: "*aquel ciclo que contiene todas las aristas de un grafo solamente una vez*".
Se debe tener en cuenta que **no importa la repetición de vértices mientras no se repitan aristas**.

Un ***camino euleriano*** es un camino que pasa por cada arista una y solo una vez.
Un ciclo euleriano es un camino cerrado que recorre cada arista exactamente una vez.
El problema de encontrar dichos caminos fue discutido por primera vez por Leonhard Euler, en el famoso problema de los puentes de Königsberg.



Se denomina *grafo euleriano* a un grafo que contiene un ciclo euleriano.
Un grafo conexo es un grafo euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado total par.

Árboles de expansión.

Árboles libres.

Un ***árbol libre*** es un grafo sencillo no dirigido que es a la vez conexo y ***acíclico***.
Todo árbol libre que contenga *n* nodos debe de tener *n*-1 aristas.

Árboles de expansión.

Un árbol de expansión de un grafo conexo no dirigido $G = (N, A)$ es un árbol libre con el conjunto de nodos N que es un subgrafo de G, es decir un ***árbol de expansión conexo, acíclico*** y tiene a todo N como nodos y a parte de A como conjunto de aristas.
Todo ***árbol de expansión*** para un grafo de *n* nodos contiene siempre *n-1* aristas.
Para la generación de un árbol de expansión se selecciona una sucesión de *n-1* aristas, una a una tal que en cada paso el subgrafo actual sea acíclico.
Tanto la búsqueda en amplitud como la búsqueda en profundidad utilizan este enfoque.

Árboles de expansión mínima.

Un árbol de expansión de un grafo ponderado conexo y no dirigido en el cual la suma de los costes de sus aristas sea mínima se denomina árbol de expansión mínima.

Grafos

Fundamentos y terminología básica

Un grafo, G, es un par, compuesto por dos conjuntos V y A. Al conjunto V se le llama conjunto de vértices o nodos del grafo. A es un conjunto de pares de vértices, estos pares se conocen habitualmente con el nombre de arcos o ejes del grafo. Se suele utilizar la notacion G = (V, A) para identificar un grafo.

Los grafos representan un conjunto de objetos donde no hay restricción a la relación entre ellos. Son estructuras más generales y menos restrictivas. Podemos clasificar los grafos en dos grupos: dirigidos y no dirigidos. En un grafo no dirigido el par de vértices que representa un arco no está ordenado. Por lo tanto, los pares (v1, v2) y (v2, v1) representan el mismo arco. En un grafo dirigido cada arco está representado por un par ordenado de vértices , de forma que y representan dos arcos diferentes.

Los grafos permiten representar conjuntos de objetos arbitrariamente relacionados. Se puede asociar el conjunto de vértices con el conjunto de objetos y el conjunto de arcos con las relaciones que se establecen entre ellos.

Los grafos son modelos matemáticos de numerosas situaciones reales: un mapa de carreteras, la red de ferrocarriles, el plano de un circuito eléctrico, el esquema de la red telefónica de una compañia, etc.

El número de distintos pares de vértices (v(i), v(j)), con v(i) <> v(j), en un grafo con n vértices es n*(n-1)/2. Este es el número máximo de arcos en un grafo no dirigido de n vértices. Un grafo no dirigido que tenga exactamente n*(n-1)/2 arcos se dice que es un grafo completo. En el caso de un grafo dirigido de n vértices el número máximo de arcos es n*(n-1).

Algunas definiciones básicas en grafos:

- Orden de un grafo: es el número de nodos (vértices) del grafo.
- Grado de un nodo: es el número de ejes (arcos) que inciden sobre el nodo
- Grafo simétrico: es un grafo dirigido tal que si existe la relación entonces existe , con u, v pertenecientes a V.
- Grafo no simétrico: es un grafo que no cumple la propiedad anterior.

- Grafo reflexivo: es el grafo que cumple que para todo nodo u de V existe la relación (u, u) de A.
- Grafo transitivo: es aquél que cumple que si existen las relaciones (u, v) y (v, z) de A entonces existe (u, z) de A.
- Grafo completo: es el grafo que contiene todos los posibles pares de relaciones, es decir, para cualquier par de nodos u, v de V, (u <> v), existe (u, v) de A.
- Camino: un camino en el grafo G es una sucesión de vértices y arcos: v(0), a(1), v(1), a(2), v(2), ... , a(k), v(k); tal que los extremos del arco a(i) son los vértices v(i-1) y v(i).
- Longitud de un camino: es el número de arcos que componen el camino.
- Camino cerrado (circuito): camino en el que coinciden los vértices extremos (v(0) = v(k)).
- Camino simple: camino donde sus vértices son distintos dos a dos, salvo a lo sumo los extremos.
- Camino elemental: camino donde sus arcos son distintos dos a dos.
- Camino euleriano: camino simple que contiene todos los arcos del grafo.
- Grafo euleriano: es un grafo que tiene un camino euleriano cerrado.
- Grafo conexo: es un grafo no dirigido tal que para cualquier par de nodos existe al menos un camino que los une.
- Grafo fuertemente conexo: es un grafo dirigido tal que para cualquier par de nodos existe un camino que los une.
- Punto de articulación: es un nodo que si desaparece provoca que se cree un grafo no conexo.
- Componente conexa: subgrafo conexo maximal de un grafo no dirigido (parte más grande de un grafo que sea conexa).