

Centro Asociado Palma de Mallorca

**Lógica y
Estructuras
Discretas**

Tutor: Antonio Rivero Cuesta

Tema 4

Combinatoria

Principios Básicos

La combinatoria es una disciplina que se ocupa de estudiar técnicas de recuento y enumeración de conjuntos, en especial cuando la cantidad de elementos que poseen es muy grande.

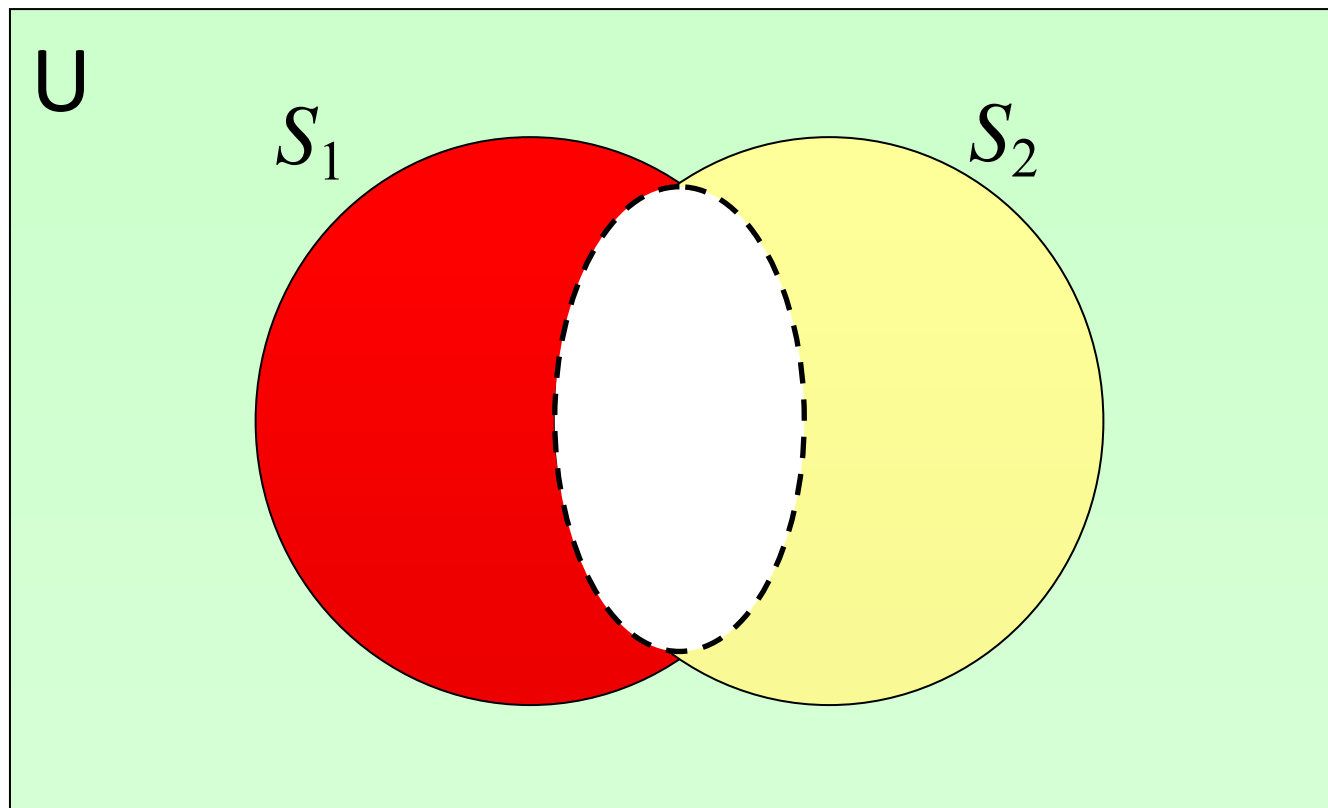
Aplicada a la teoría de probabilidades permite en muchos casos determinar la cantidad de elementos de un espacio de muestra finito y la cantidad de elementos de algún evento de interés.

Principio de la Suma

Si una tarea se puede realizar de dos formas posibles, dando la primera m resultados posibles y la segunda n resultados posibles, entonces la tarea puede ser de $m+n$ formas posibles.

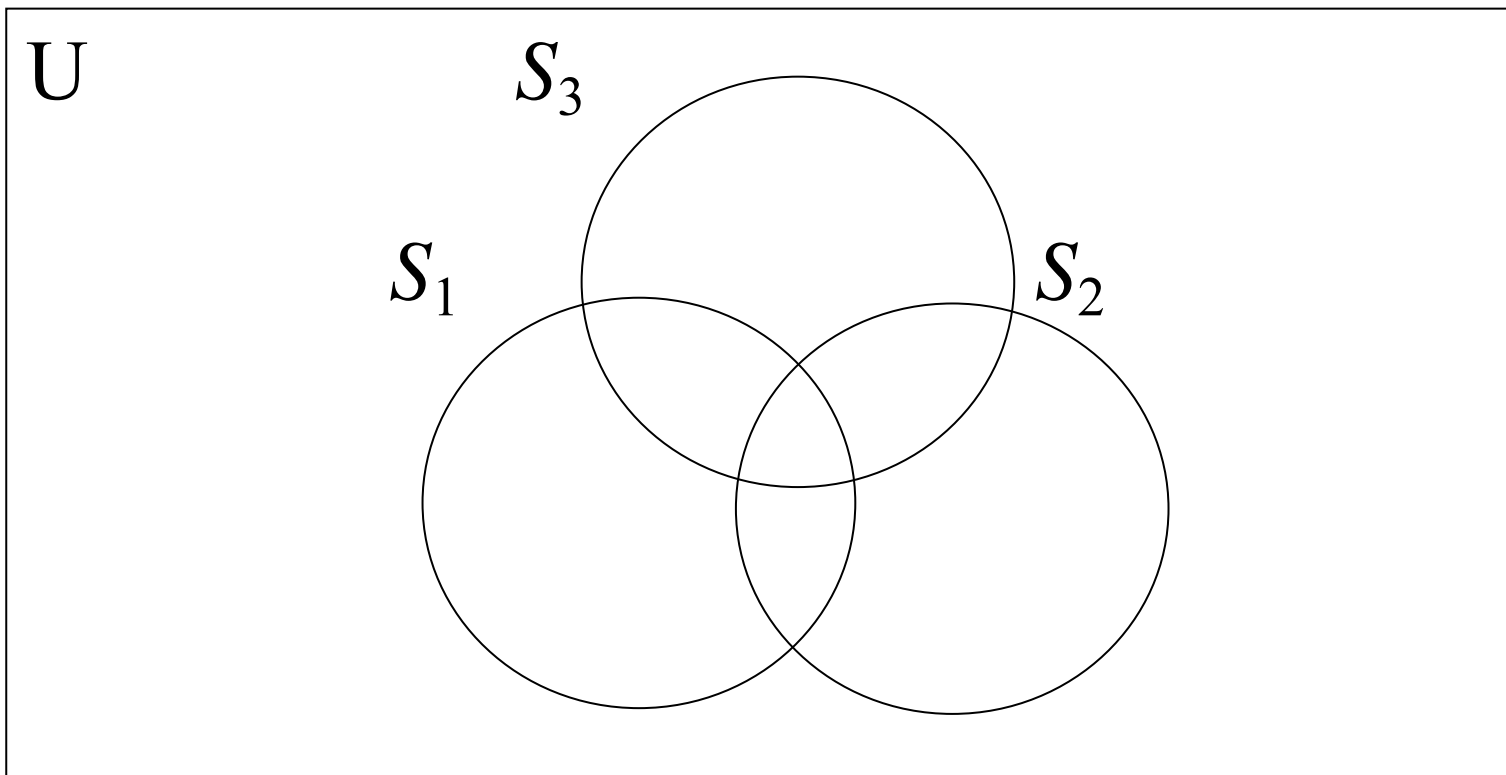
Principio Inclusión - Exclusión

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$



Tres Conjuntos

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|.$$



Principio de la Multiplicación

Si una experiencia está compuesta de varias etapas y cada una de ellas admite diferentes posibilidades, el número total de situaciones posibles se obtendrá multiplicando.

Funciones Importantes en Combinatoria

Factorial de un Número

El *factorial* para todo entero positivo n se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n .

La función factorial es formalmente definida mediante el producto:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

$$\text{Si } n = 0, 0! = 1$$

Número Combinatorio

Se define como:

$$Binom(m, n) =$$

$$C(m, n) = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m - n)!}$$

Formas de Agrupamiento

Variaciones

Sea A un conjunto con n elementos y $r \leq n$, llamaremos variación de orden r a toda lista ordenada formada por r elementos distintos de entre los n elementos de A .

Dos listas serán distintas si difieren en algún elemento o en el orden.

El número total de listas se indica: $V(n,r)$.

$$V(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variaciones con Repetición

Si en la definición anterior podemos repetir elementos obtendremos las variaciones con repetición que se representan por:

$$VR(n, r) = n^r$$

Permutaciones

Sea A un conjunto finito formado por n elementos, una permutación de A es una lista ordenada formada por los n elementos de A .

Dos permutaciones de A difieren en la colocación de al menos uno de los elementos.

Las permutaciones son manera de distribuir objetos.

$$P(n) = n!$$

Permutaciones con Repetición

Sea A un conjunto finito con k elementos ($k > 0$), una permutación con repetición de m elementos de A , es una lista en la que el elemento a_i se repite m_i veces.

Dos listas son distintas si difieren en el orden de sus elementos.

$$PR_n^r = \frac{r!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Combinaciones

Sea A un conjunto finito formado por n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$, una combinación de orden r de A es una lista de elementos de A distintos dos a dos.

Diremos que dos combinaciones son diferentes si algún elemento de una lista no se encuentra en la otra.

Las combinaciones son maneras de seleccionar objetos.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Otra forma de expresar las combinaciones es:

$$C_{nr} = \binom{n}{r} = \frac{V_{nr}}{P_r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Combinaciones Repetición

Sea A un conjunto finito formado por n elementos ($n > 0$) y r un número natural $r \leq n$, una combinación con repetición de orden r de A es una lista de elementos de A en donde los elementos pueden repetirse.

Diremos que dos combinaciones con repetición son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra.

Combinaciones Repetición

$$CR(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Binomio de Newton

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Binomio de Newton

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 =$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 =$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Resumen

Tenemos n elementos y formamos grupos de r

Agrupación	Importa el Orden	Puede Repetirse	En cada Agrupación	FÓRMULA
Variaciones	SI	NO	$r < n$	$V(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
Variaciones Repetición	SI	SI	$r < n$	$VR(n, r) = n^r$
Permutaciones	SI	NO	$r = n$	$P(n) = n!$
Permutaciones Repetición	SI	SI	$r = n$	$PR_n^r = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots}$
Combinaciones	NO	NO	$r \leq n$	$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Combinaciones Repetición	NO	SI	$r \leq n$	$CR(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$