Centro Asociado Palma de Mallorca

Lógica y Estructuras Discretas

Tutor: Antonio Rivero Cuesta

Tema 3
Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

y

Operaciones

Los **conjuntos** se representan con letras mayúsculas,

A,B,C,…

Los **elementos** se representan con minúsculas,

a, b, c,.

Formas de definir un conjunto

- Extensión
- Comprensión o Intensión

Extensión

Enumeramos todos y cada uno de los elementos.

S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

V = {a, e, i, o, u}

Comprensión

Definimos alguna característica común a todos los elementos.

$$S = \{\text{días de la semana}\}$$

$$V = \{\text{vocales del español}\}$$

Relación de Pertenencia

- El elemento *a* pertenece al conjunto X,

$$a \in X$$

- El elemento *a* no pertenece a Z,

$$a \notin Z$$

Relación de Inclusión

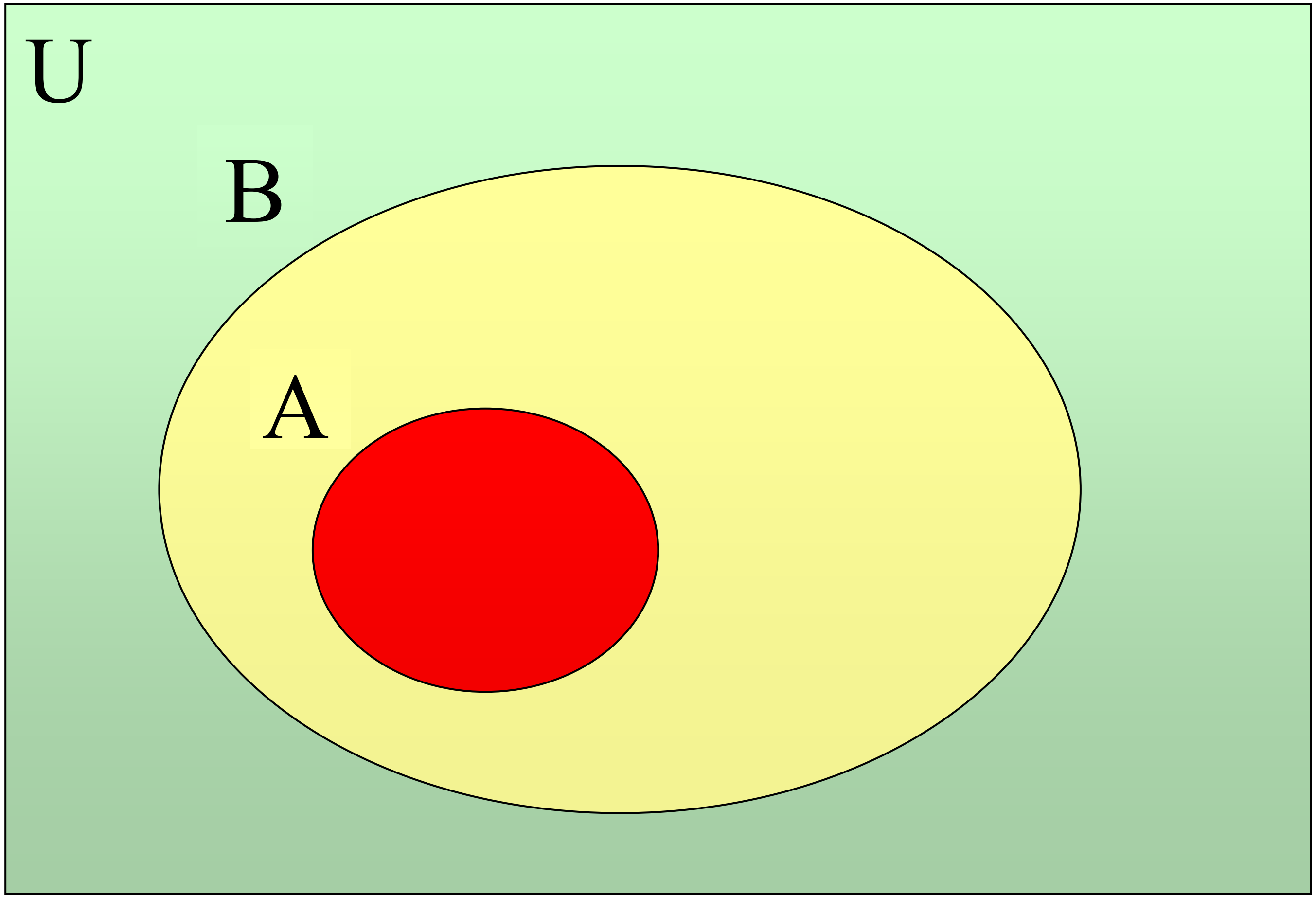
Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está incluido en B y se escribe

$$A \subset B \quad \text{o} \quad A \subseteq B$$

Cuando todos los elementos de A pertenecen a B.

Si A está contenido en B se dice que A es un ***subconjunto*** de B o que A es una parte de B.

$A \subseteq B$



Propiedades de la inclusión de conjuntos.

- **Reflexiva:** todo conjunto A está contenido en sí mismo. $A \subset A$.

- **Transitiva:** Si un conjunto A está contenido en otro B, y B está contenido en otro conjunto C, entonces A está contenido en C.

  Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Conjuntos Iguales

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces son iguales $A = B$.

Superconjunto

Si tenemos dos conjuntos A y B.

$$B \supset A \text{ o } B \supseteq A$$

Decimos que B es superconjunto de A.

Subconjunto Propio

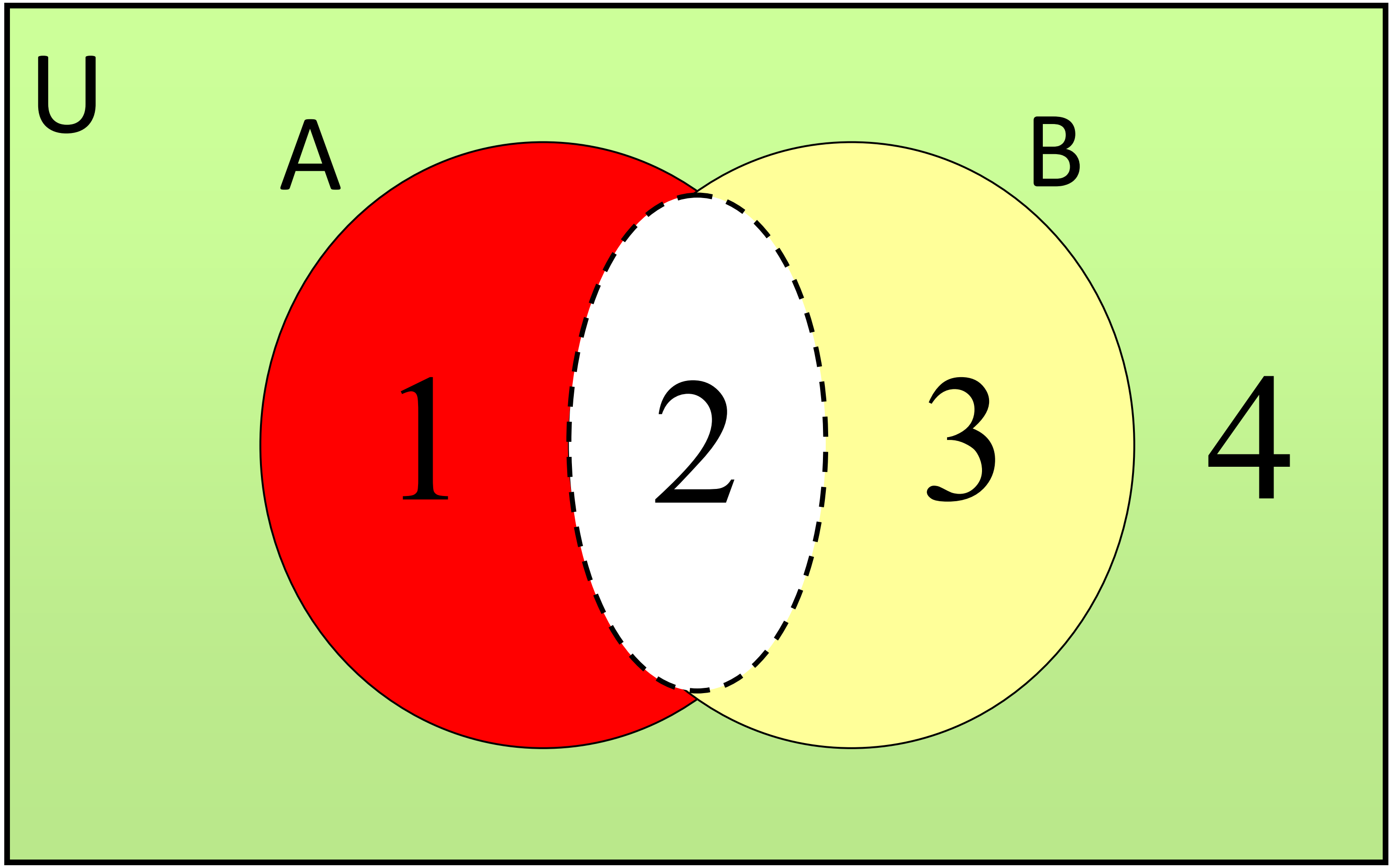
Un conjunto A es un ***subconjunto propio*** de un conjunto B si $A \subset B$ y $A \neq B$.

Conjunto Finito

Si tiene un número ***finito*** de elementos.

Conjunto Universal

Es el conjunto que contiene a todos los conjuntos que se analizan en un determinado contexto y se representa por U.


U
A
B
1
2
3
4

Conjunto Vacío

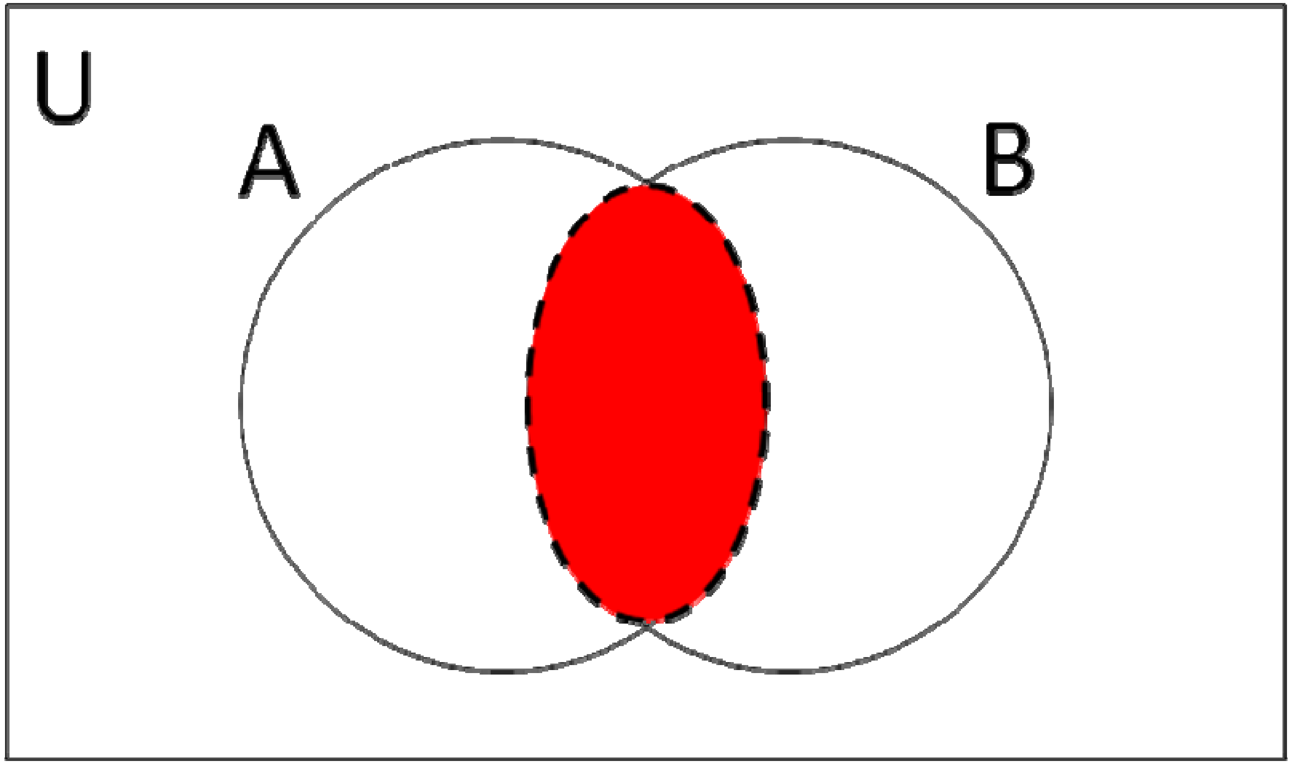
Es un conjunto que no tiene elementos, se representa por $\varnothing$.

Cualquiera que sea el conjunto A se cumple $\varnothing \subset A$.

Operaciones con Conjuntos

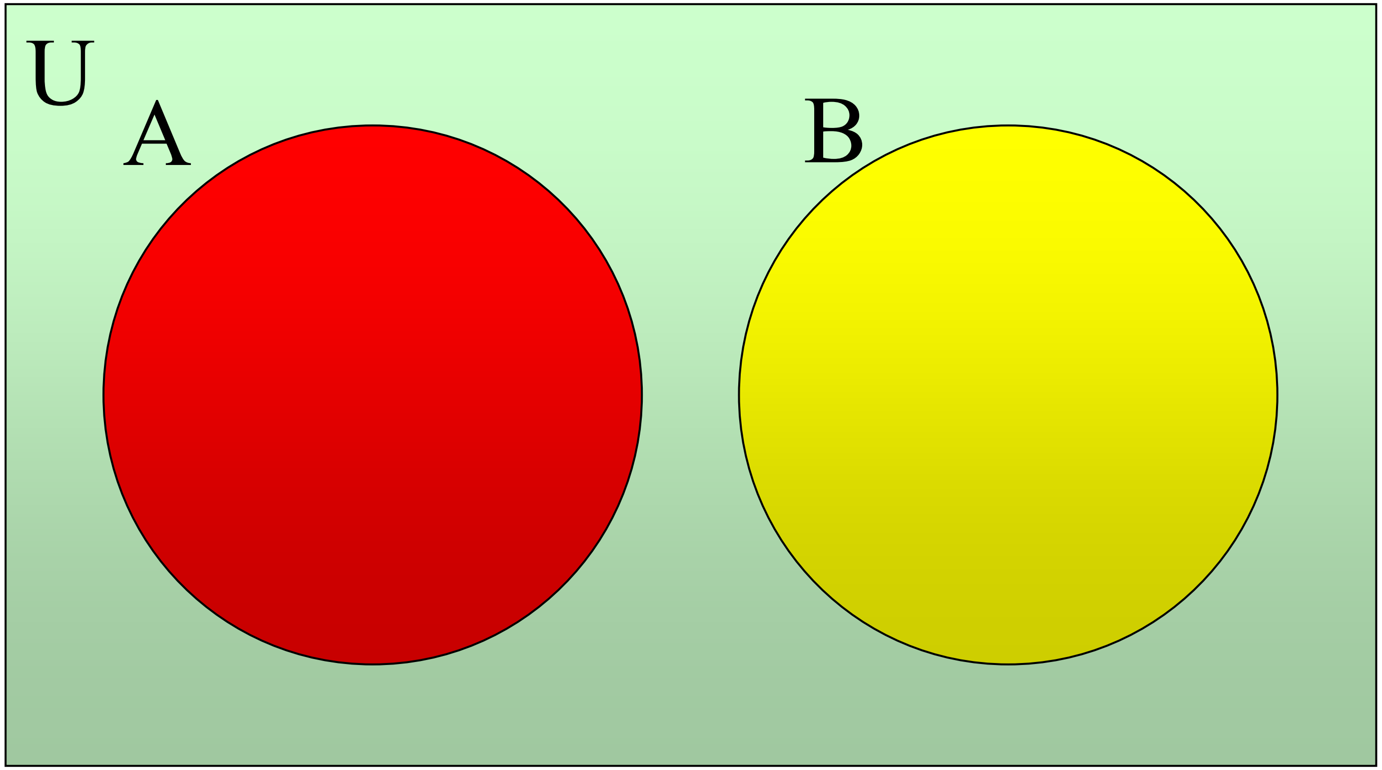
Intersección

Es el conjunto que tiene como elementos los comunes a ambos conjuntos, se representa por **A ∩ B**.



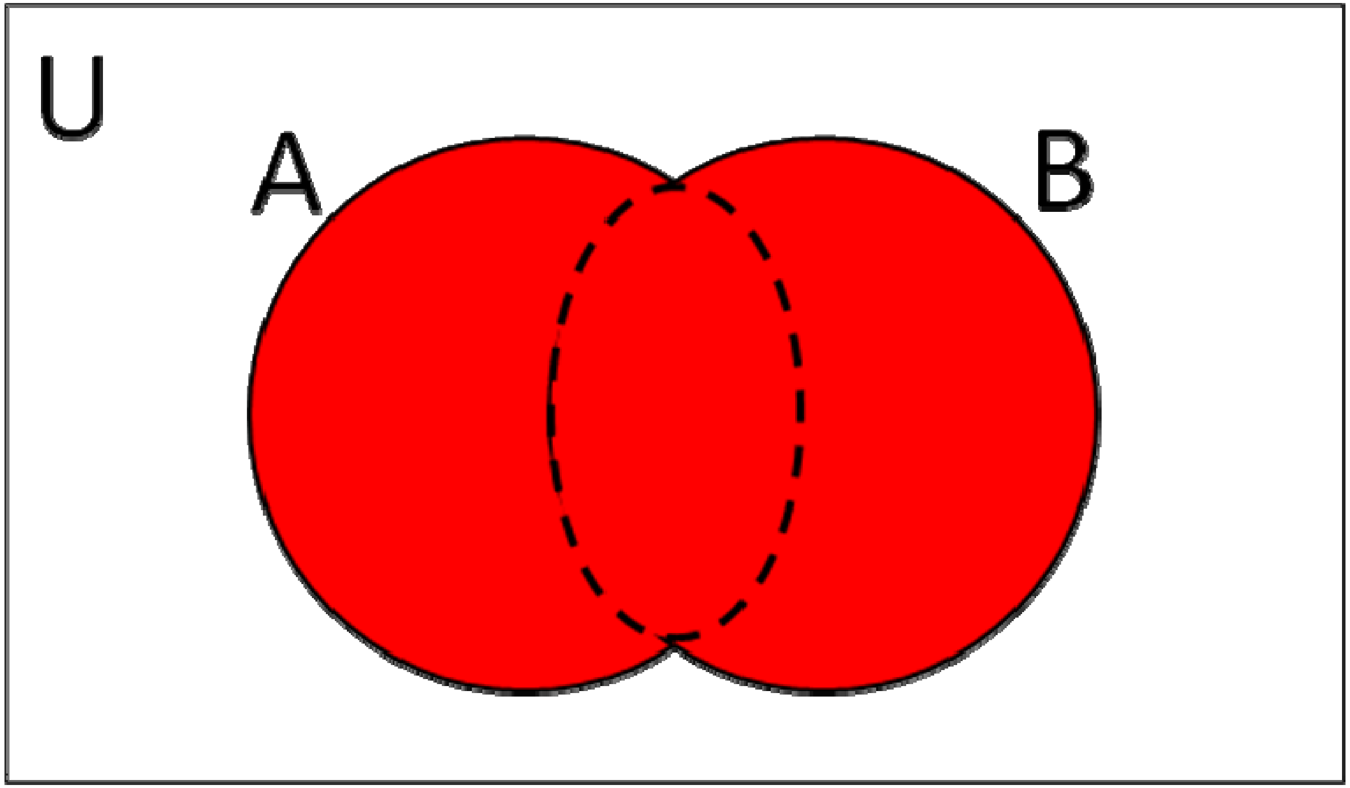
Conjuntos Disjuntos

$$A \cap B = \varnothing$$



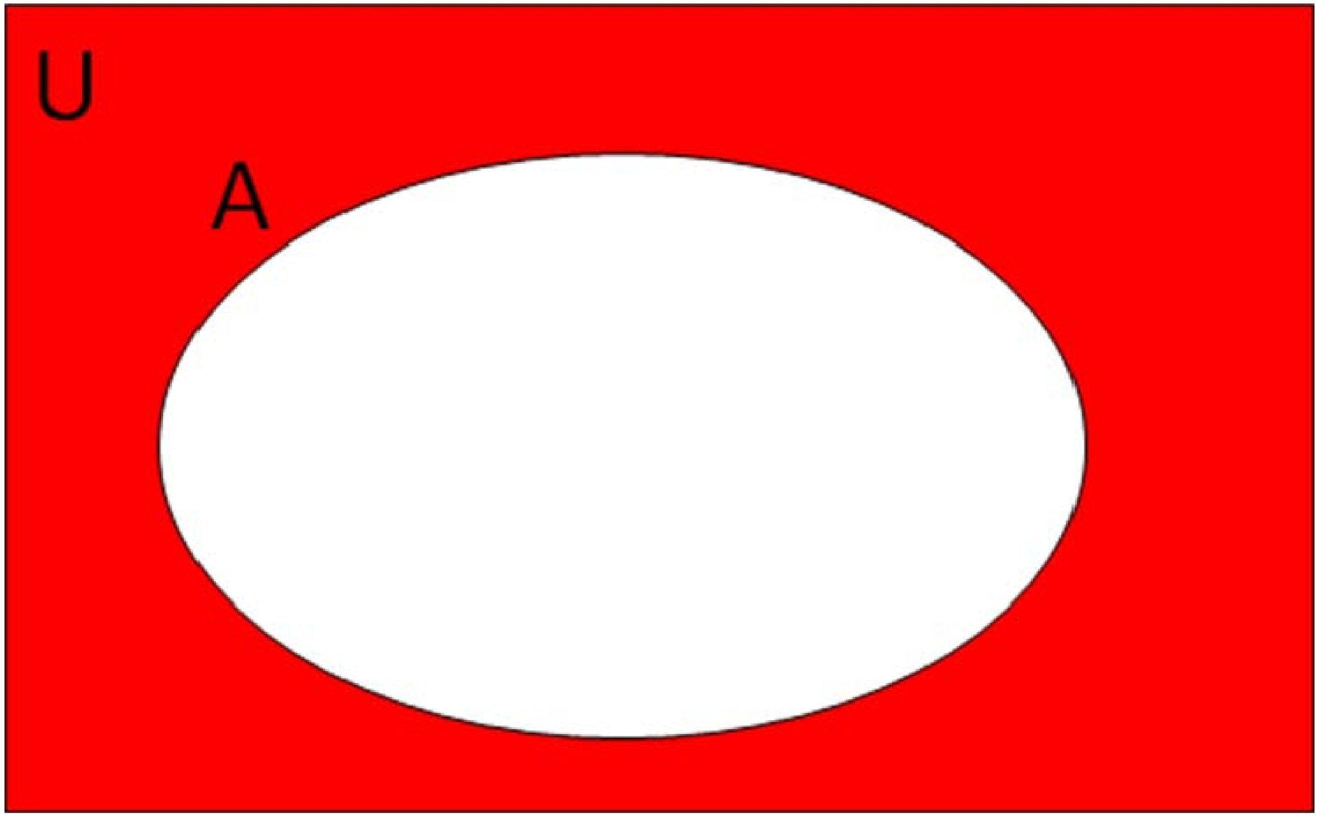
Unión

Es el conjunto que tiene como elementos los que pertenecen a alguno de los conjuntos, se representa por **A ∪ B**.



Conjunto Complementario

El **conjunto complementario** de A está formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A, se representa por $\sim A$.

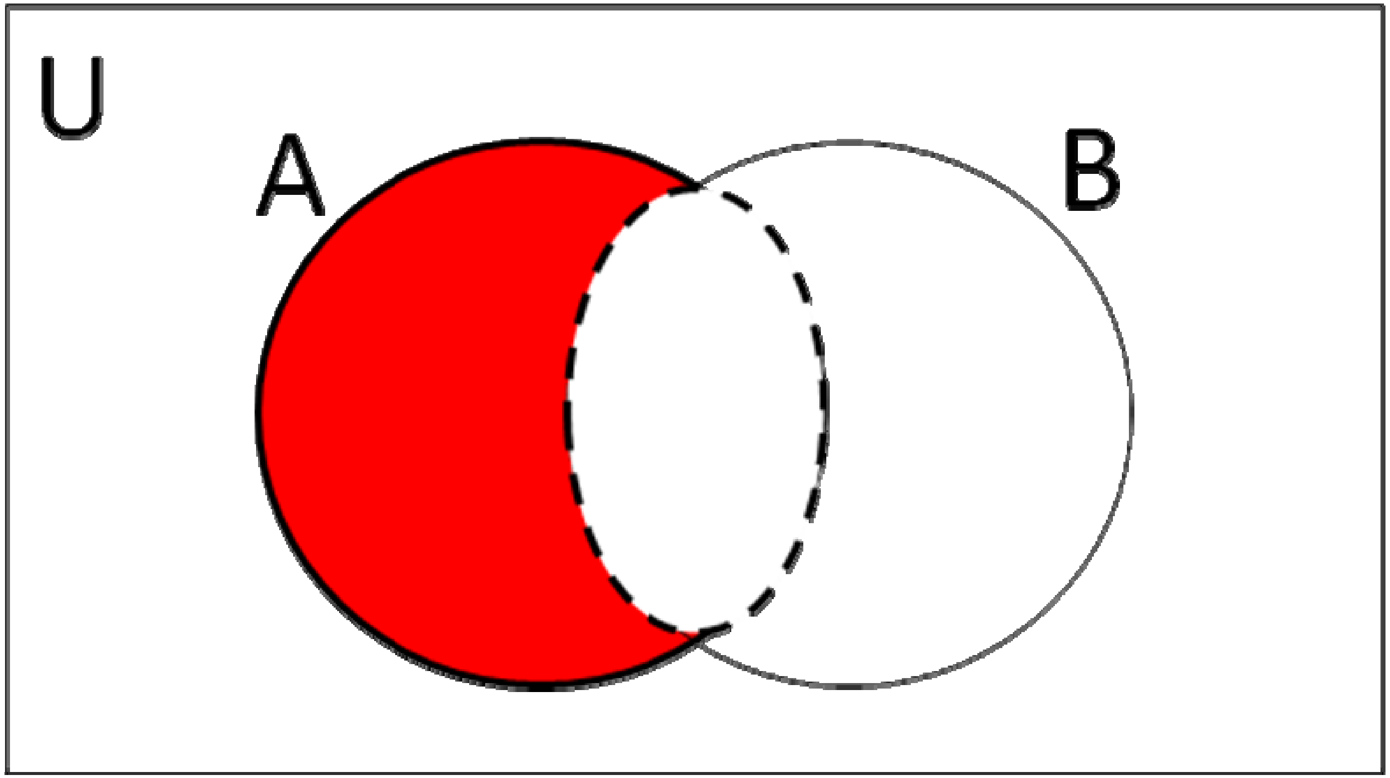


Diferencia

La ***diferencia*** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, se representa por A \ B.

La diferencia de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de A con el complementario de B, se representa por $A \setminus B = A \cap {\sim}B$.

$$A \setminus B = A \cap \sim B$$



Partición de un Conjunto

La ***Partición de un conjunto*** A es una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que:

- Ninguno es vacío.
- La unión de todos es A.
- Cada par de conjuntos A_i y A_j, con $i \neq j$, son disjuntos.

Partición de un Conjunto

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$

Sean los conjuntos:

$A_1 = \{a, b, f\}, A_2 = \{c, d\}$ y $A_3 = \{e, g\}.$

- Ninguno es vacío.
- La unión de todos es A.
- Cada par de conjuntos son disjuntos.

Representación Gráfica de Conjuntos

Los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados ***diagramas de Venn***.

El conjunto universal lo representamos por un rectángulo y los conjuntos por círculos dentro del conjunto universal.

Propiedades de los Conjuntos

Asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

De De Morgan

$$\sim (A \cup B) = \ \sim A \cap \sim B$$

$$\sim (A \cap B) = \ \sim A \cup \sim B$$

Doble Complementación

$$\sim(\sim A) = A$$

Identidad

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap U = A$$

Complemento

$$A \cup \sim A = U$$

Exclusión

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Complementación del Conjunto Universal y del Conjunto Vacío

$$\sim U = \varnothing$$

$$\sim \varnothing = U$$

Tuplas y
Conjunto Potencia

Secuencia

Lista de objetos en donde el orden importa.

Se definen con paréntesis o corchetes.

- (.....)
- [.....]

Tuplas

Partimos de una secuencia de n conjuntos.

Una ***tupla***, o ***n-tupla***, es una secuencia de pares ordenados.

Producto Cartesiano

El ***producto cartesiano*** de los conjuntos de una secuencia es el conjunto de todas las posibles ***n-tuplas*** de esa secuencia.

Sus elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse tomando el primer elemento del par del primer conjunto, y el segundo elemento del segundo conjunto.

Ejemplo, dados los conjuntos

$A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b\}$,

Su producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$$

Conjuntos Potencia

Sea A un cierto conjunto.

El ***conjunto potencia*** de A, escrito como P(A), es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

Si el conjunto A tiene ***n*** elementos, el conjunto de las partes de A tiene 2^n elementos.

Construir el conjunto potencia de $A = \{a,b,c\}$.

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Conjuntos Notables

- Conjunto booleano y valor booleano
- Conjunto de bits
- Conjunto de caracteres
- Conjunto de los números enteros
- Conjunto de los números naturales
- Conjunto de los números racionales
- Conjunto de los números reales
- Conjunto de los números irracionales

Clasificación de los Números

$$
\textit{Complejos } \mathbb{C}
\begin{cases}
\textit{Reales } \mathbb{R}
\begin{cases}
\textit{Racionales } \mathbb{Q}
\begin{cases}
\textit{Enteros } \mathbb{Z}
\begin{cases}
\textit{Naturales } \mathbb{N} \\
\textit{Cero} \\
\textit{Negativos}
\end{cases} \\
\textit{Fraccionarios}
\begin{cases}
\textit{Decimales exactos} \\
\textit{Decimales periódicos puros} \\
\textit{Decimales periódicos mixtos}
\end{cases}
\end{cases} \\
\textit{Irracionales}
\begin{cases}
\textit{Algebraicos irracionales} \\
\textit{Trascendentes}
\end{cases}
\end{cases} \\
\textit{Imaginarios}
\end{cases}
$$

Relaciones

Relación y Aridad

Una ***relación*** de A en B es cualquier conjunto de pares (x,y),

$$x \in \mathrm{A} \quad \text{e} \quad y \in \mathrm{B}.$$

La ***aridad*** de un operador matemático o de una función es el número de argumentos necesarios para que dicho operador o función se pueda calcular.

Relación binaria, es una relación de aridad 2.

Relación ternaria, es una relación de aridad 3.

Relación universal, contiene todas las tuplas.

Relación vacía, no contiene ninguna tupla.

Operaciones Sobre Relaciones

- Unión.
- Intersección.
- Diferencia.
- Complemento.

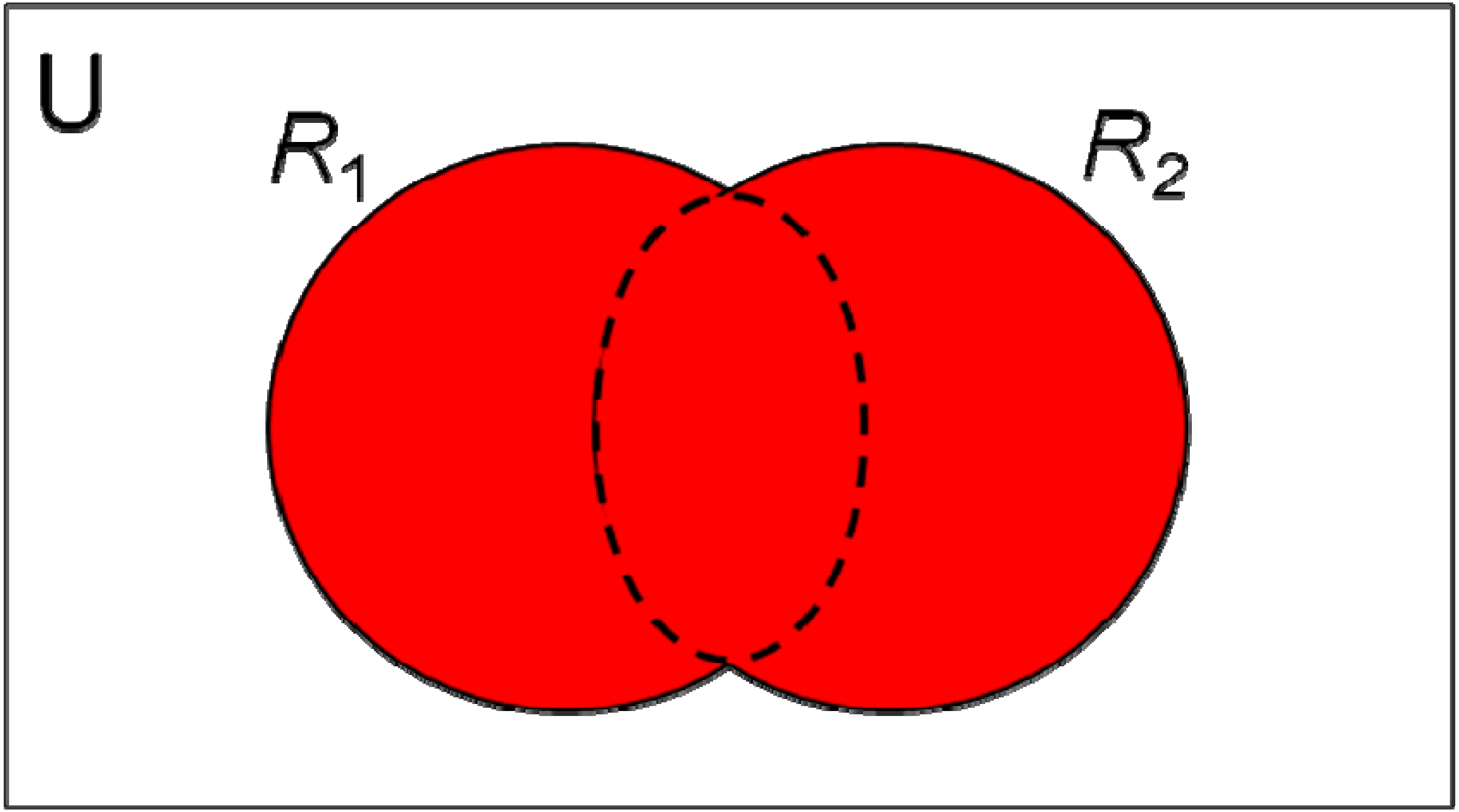
Relación Unión

Si tenemos R_1 y R_2

Su ***relación unión*** serán todas las tuplas de R_1 y R_2.

Notación: $R_1 \cup R_2$.

$$R_1 \cup R_2$$



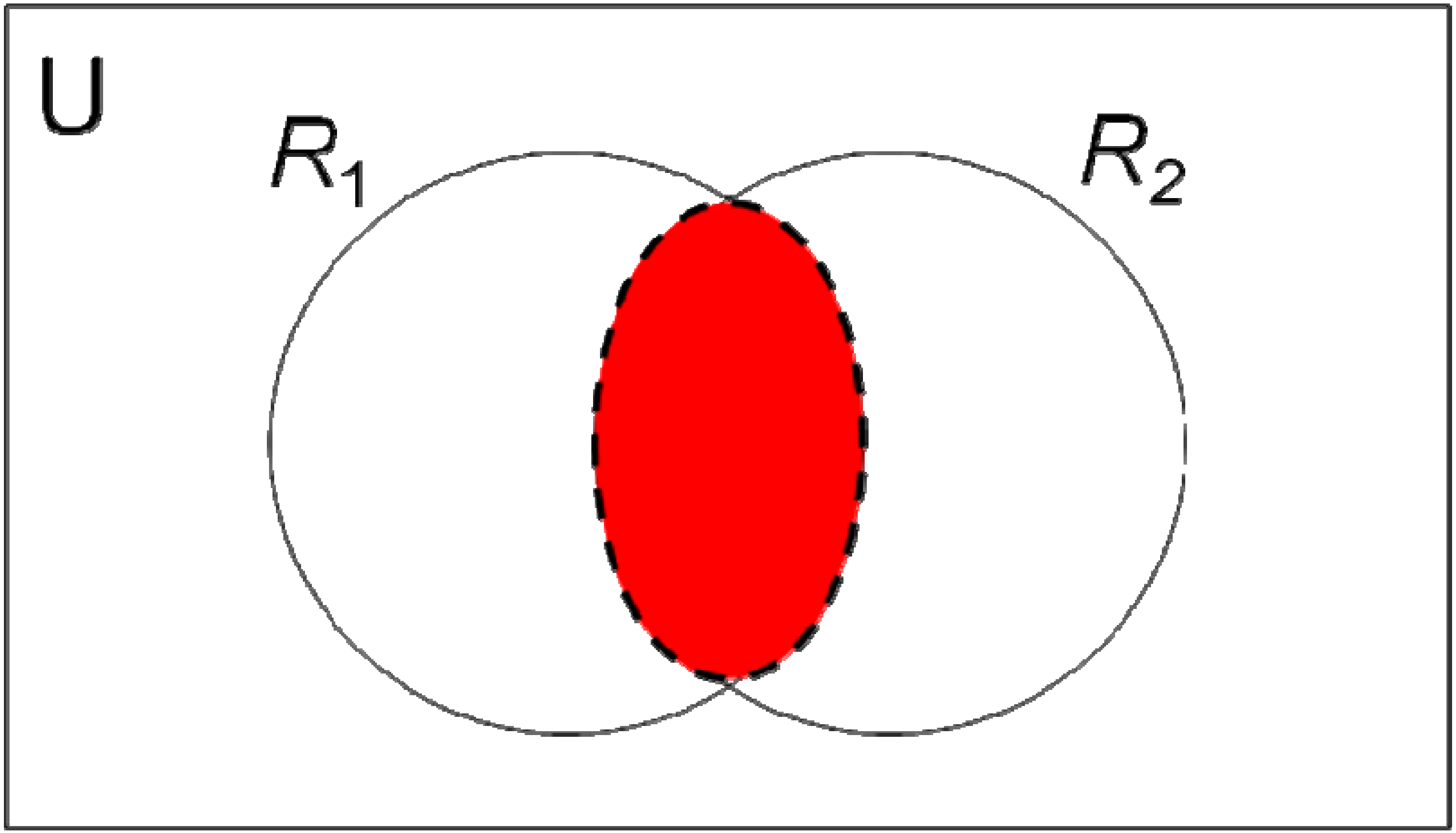
Relación Intersección

Si tenemos R_1 y R_2

Su ***relación intersección*** serán todas las tuplas comunes de R_1 y R_2.

Notación: $R_1 \cap R_2$.

$$R_1 \cap R_2$$



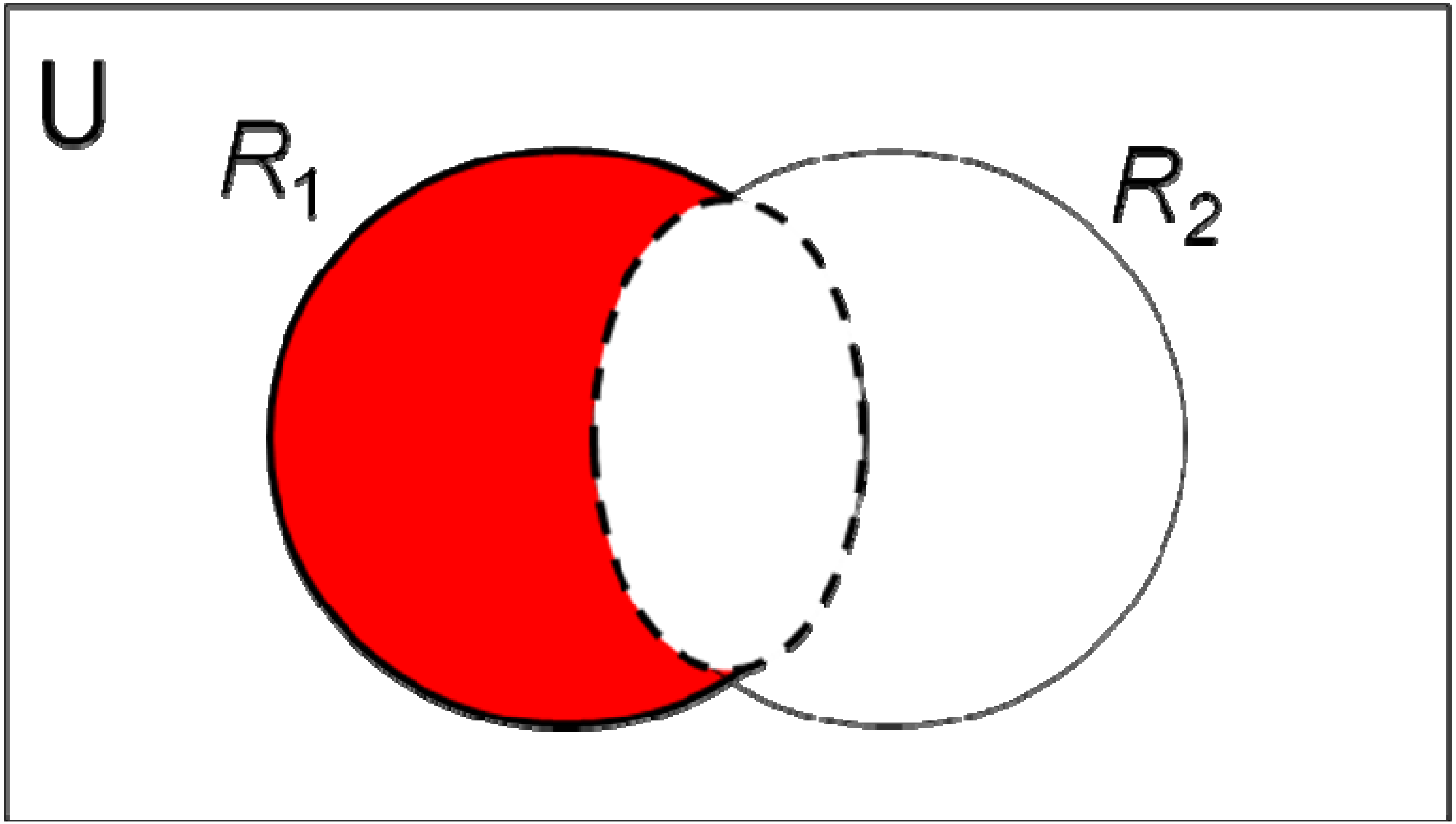
Relación Diferencia

Si tenemos R_1 y R_2

Su ***relación diferencia*** serán todas las tuplas que pertenecen a R_1 y no pertenecen R_2.

Notación: $R_1 \setminus R_2$

$R_1 \setminus R_2$

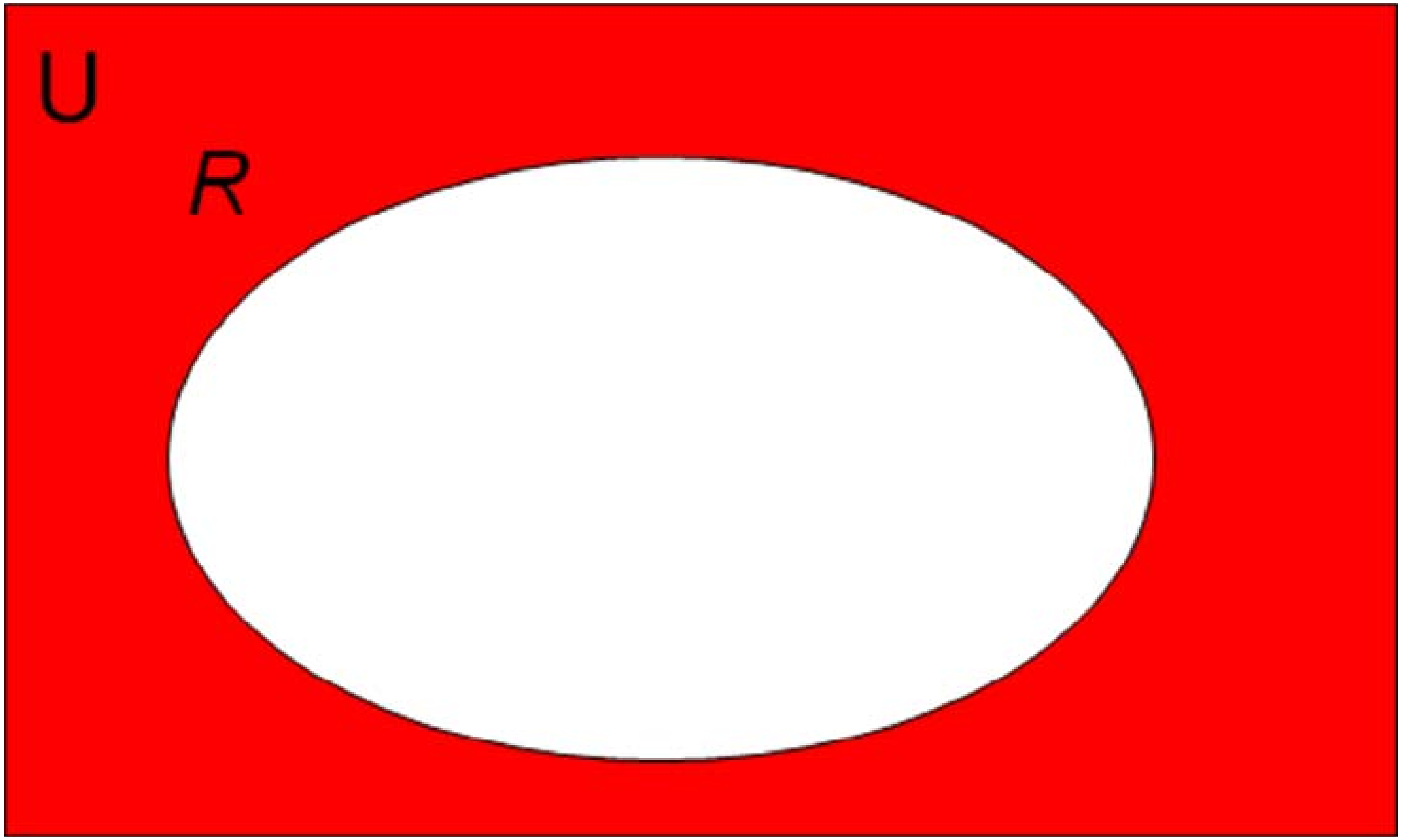


Complemento de una Relación

La ***relación complemento*** de ***R*** está formada por todas las tuplas que están fuera de ***R.***

Notación: $\sim\boldsymbol{R}$

$\sim R$



Relaciones Iguales

Si tenemos $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$

Y además $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}$

Entonces son iguales $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}$

Relaciones Binarias

Dominio de una Relación Binaria

Si tenemos una relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$.

El ***dominio*** de $\boldsymbol{R}$ son todos los elementos de $\boldsymbol{X}$

Notación: $\boldsymbol{dom(R)}$

Espacio de dominio de una Relación Binaria

Si tenemos una relación binaria ***R*** de ***X*** en ***Y*.**

El ***espacio del dominio*** de ***R*** es el conjunto ***X***

Rango de una Relación Binaria

Si tenemos una relación binaria ***R*** de ***X*** en ***Y*.**

El ***rango*** de ***R*** son todos los elementos de ***Y***

Notación: ***ran*(*R*)**

Espacio de rango de una Relación Binaria

Si tenemos una relación binaria ***R*** de ***X*** en ***Y*.**

El ***espacio del rango*** de ***R*** es el conjunto ***Y***

Relación Inversa

Si tenemos una relación $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$.

La relación inversa toma las tuplas del conjunto final al inicial, es decir, de Y hasta X.

Notación: $\boldsymbol{R}^{-1}$

Composición de dos Relaciones

Tenemos $\boldsymbol{R}$ una relación de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$.

Tenemos $\boldsymbol{S}$ una relación de $\boldsymbol{Y}$ en $\boldsymbol{Z}$.

La ***composición*** de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$ es la relación de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Z}$.

Está formada por los pares (x, z).

Relación Identidad

Tenemos un conjunto $\boldsymbol{X}$.

La ***relación de identidad*** está formada por todos los pares (x, x).

En una matriz serían los elementos de la diagonal principal.

Notación: $\boldsymbol{I_X}$

Representación de Relaciones

- En forma de matriz.
- Gráficamente. Formada por nodos y arcos.

Propiedades de las Relaciones

Reflexiva

Una relación R en X es reflexiva si

$$\forall x(Rxx)$$

Si todos los nodos tienen un bucle entonces la relación es reflexiva.

Reflexiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Irreflexiva

Una relación es ***irreflexiva***, si ningún elemento del conjunto está relacionado consigo mismo:

$$\forall x \in \mathrm{A}: (x,x) \notin R$$

$$\neg\exists x \in \mathrm{A}: (x,x) \notin R$$

Irreflexiva

$$\begin{bmatrix} \color{red}{0} & 0 & 1 \\ 0 & \color{red}{0} & 0 \\ 1 & 1 & \color{red}{0} \end{bmatrix}$$

Simétrica

Una relación R en X es ***simétrica*** si:

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

Simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Antisimétrica

Sea $M_R = [M_{ij}]$ la matriz de la relación R.

Una matriz es antisimétrica si y solo si:

$$m_{ij} = 1 \text{ y } m_{ji} = 0.$$

Antisimétrica

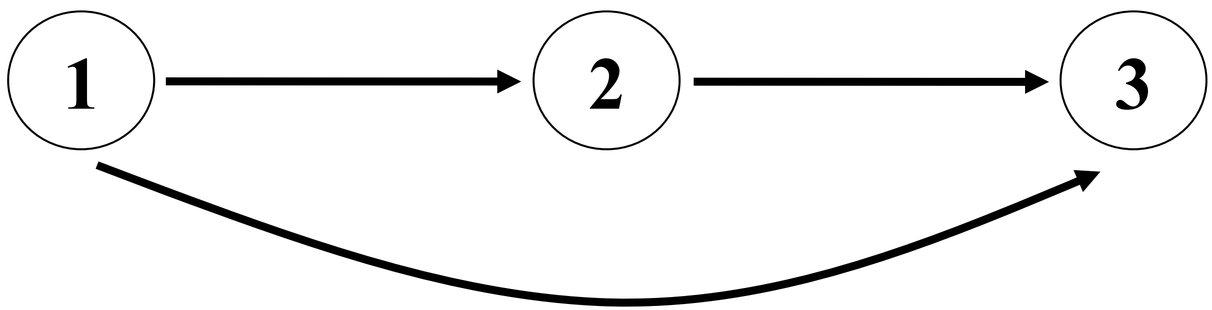
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relación Transitiva

Una relación R en X es transitiva si:

$$\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$$

Una relación es ***transitiva*** si y sólo si todos los pares de objetos que pueden ser alcanzados a través de un intermediario pueden también ser alcanzados directamente.



Cierres

Para obtener un cierre se añaden tan pocos elementos como sea posible para hacer la relación en cuestión.

Consiste en hacer que una relación que no cumple una propiedad sí la cumpla.

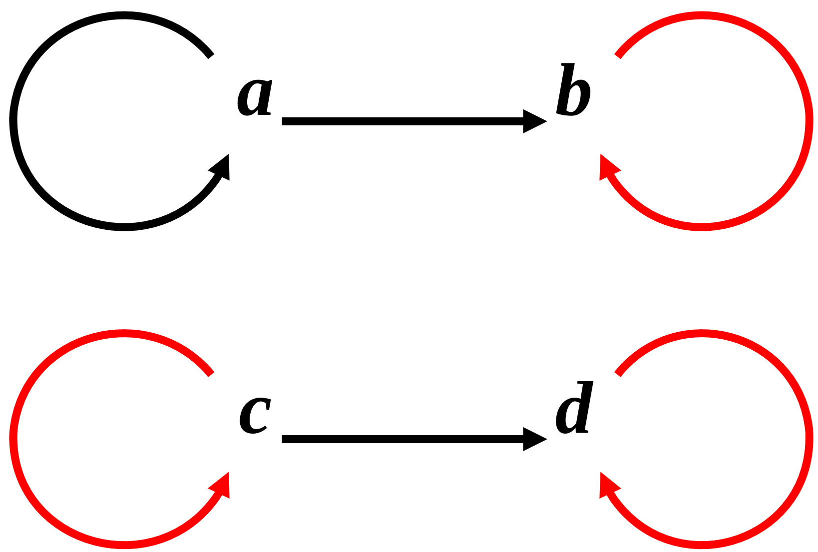
Cierre Reflexivo

El ***cierre reflexivo*** R' de una relación R es la relación reflexiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

Cierre Reflexivo

Para la relación {(a,b),(c,d),(a,a)}, definida en {a,b,c,d},

Sería: {(a,b),(c,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)}



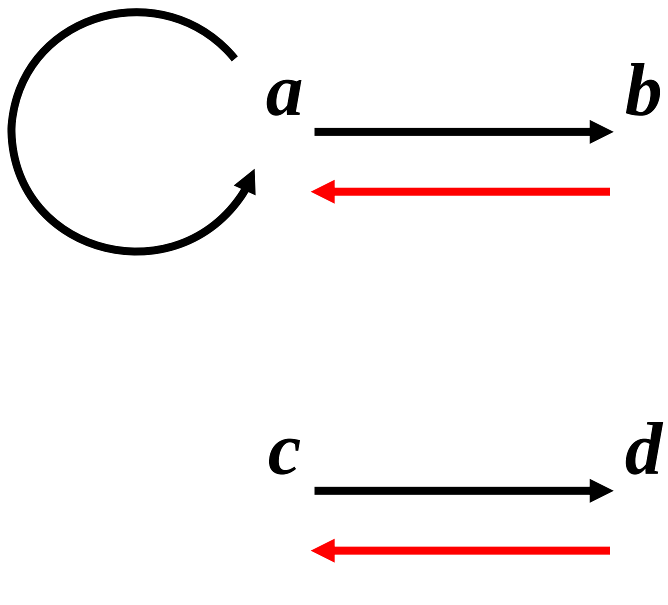
Cierre Simétrico

El ***cierre simétrico*** R' de una relación R es la relación simétrica más pequeña que contiene a R como subconjunto.

Cierre Simétrico

Para la relación {(a,b),(c,d),(a,a)}, definida en {a,b,c,d},

El cierre simétrico es: {(a,b),(c,d),(a,a),(b,a),(d,c)}.



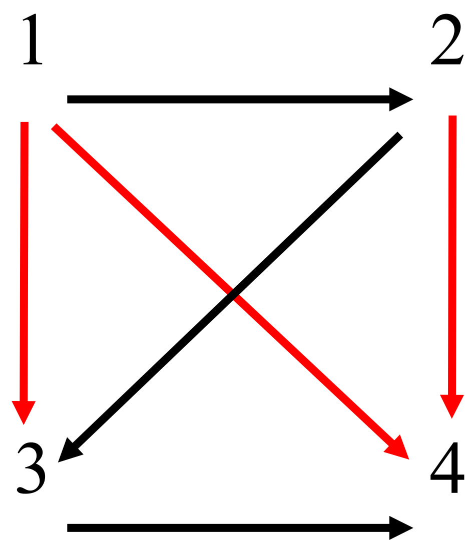
Cierre Transitivo

El ***cierre transitivo*** *R´* de una relación R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

Cierre Transitivo

Sean: A = {1, 2, 3, 4}; R = {(1,2), (2,3), (3,4)}

El cierre transitivo es: (1,3),(2,4),(1,4)



Relaciones de Equivalencia

Una ***relación de equivalencia*** es:

- Reflexiva.
- Simétrica.
- Transitiva.

Clase de Equivalencia

Sabemos que R es una relación de equivalencia.
Tenemos un conjunto X.

Sea $x \in X$.

La ***clase de equivalencia*** asociada a x en R es el *conjunto de los elementos* $y \in X$ tales que $(x, y) \in R$.

Notación: $[x]$

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

La clase de equivalencia asociada al elemento 1 es:

$$[1] = \{1, 3\}$$

Se cumple que $[1] = [3]$, y que $[2] = [4]$.

Hay dos clases de equivalencia en X, que son:

- $[1] = [3] = \{1, 3\}$.
- $[2] = [4] = \{2, 4\}$.

Conjunto Cociente

El ***conjunto cociente*** de X *según* R está formado por todas las clases de equivalencia en R.

Sean el conjunto X

La relación R del ejemplo anterior.

El conjunto cociente de X según R es:

$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$

Relaciones de Orden

Orden Parcial Débil

Una relación es un ***Orden parcial débil*** si es:

- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva.

Conjunto Parcialmente Ordenado

Un conjunto se denomina ***conjunto parcialmente ordenado*** o ***cpo***, si existe un orden parcial débil.

Orden Estricto

Una relación es un ***Orden estricto*** si es:

- Irreflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva.

Orden Total o Lineal

Un ***orden total o lineal*** implica que la relación sea:

- Reflexiva.
- Antisimétrica.
- Transitiva.

Conjunto Totalmente Ordenado

Si R es un orden total en X.

Entonces diremos que X es un ***conjunto totalmente ordenado*** o ***linealmente ordenado***

Funciones

Las funciones son relaciones.

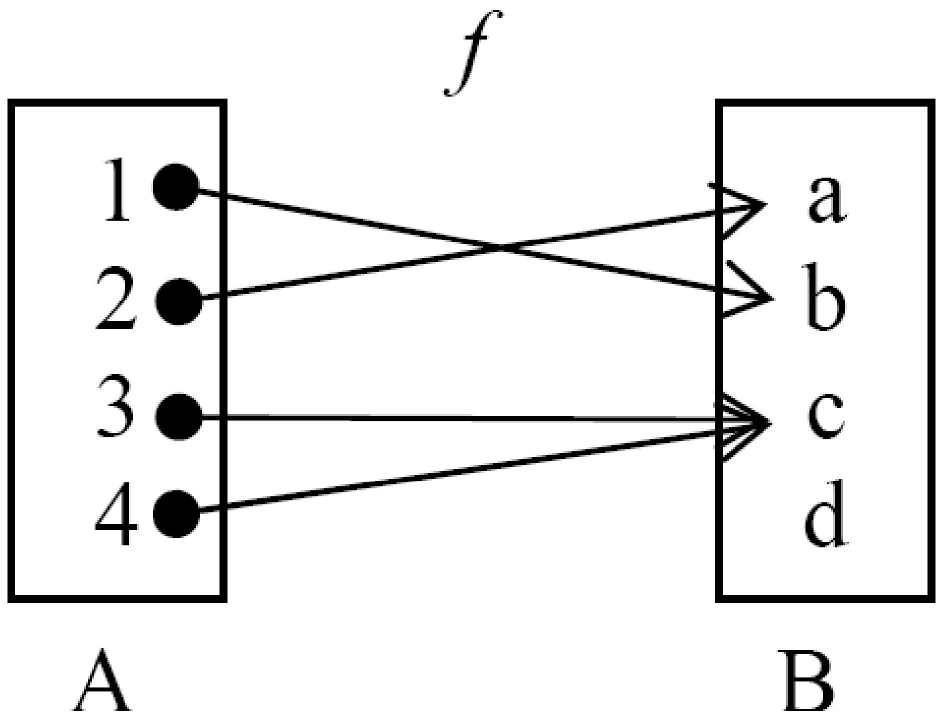
Una ***función*** entre dos conjuntos A y B es una transformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.

El conjunto A se llama ***conjunto inicial*** o ***dominio*** de la aplicación.

El conjunto B se llama ***conjunto final*** o ***codominio*** de la aplicación.

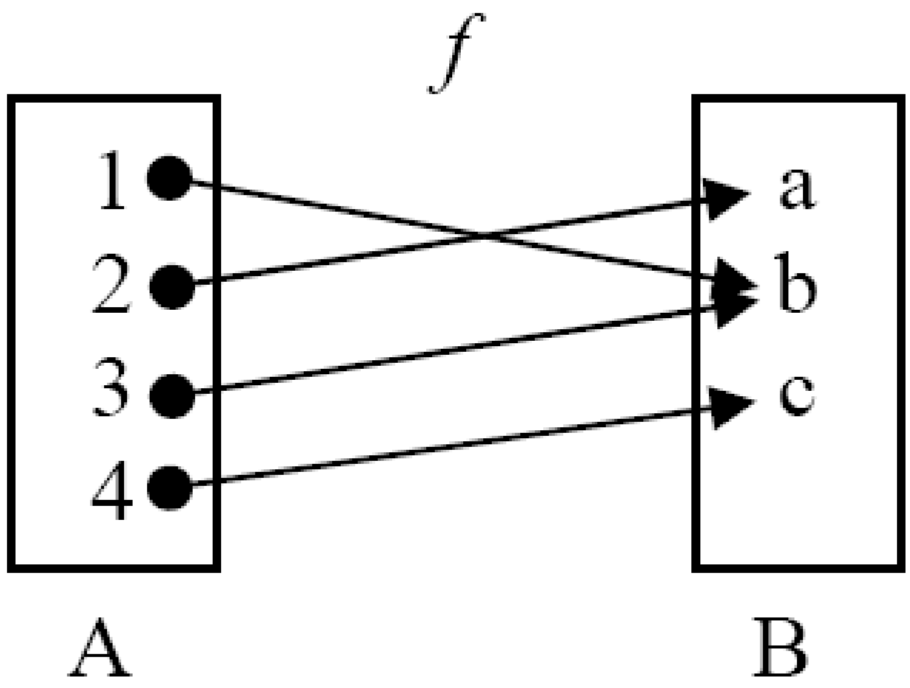
Imagen

Si el elemento $x \in$ A se transforma en el elemento $y \in$ B se escribe $y = f(x)$, se dice que y es la ***imagen*** de x mediante la ***aplicación*** f.



Preimagen

Se denomina ***preimagen*** de un elemento del conjunto final a un elemento del inicial con el que se relaciona.



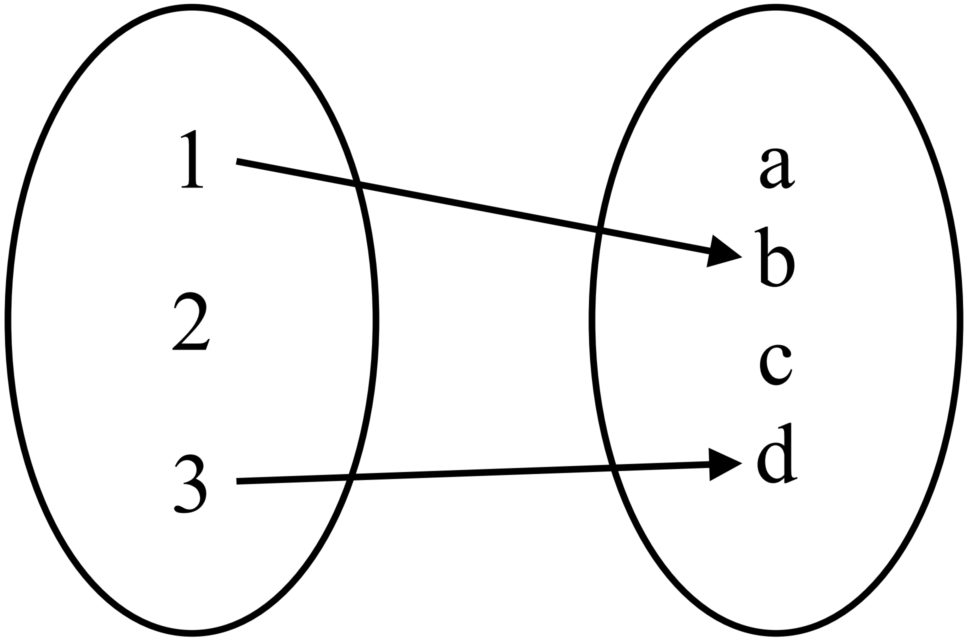
Función Parcial

Una función que está indefinida para algunos elementos, se conoce como ***parcial***.

Es una relación que asocia elementos del conjunto inicial con, como máximo, uno de los elementos del final.

No es necesario que todos los elementos del ***dominio*** estén asociados con algún elemento del ***codominio***.

Función Parcial

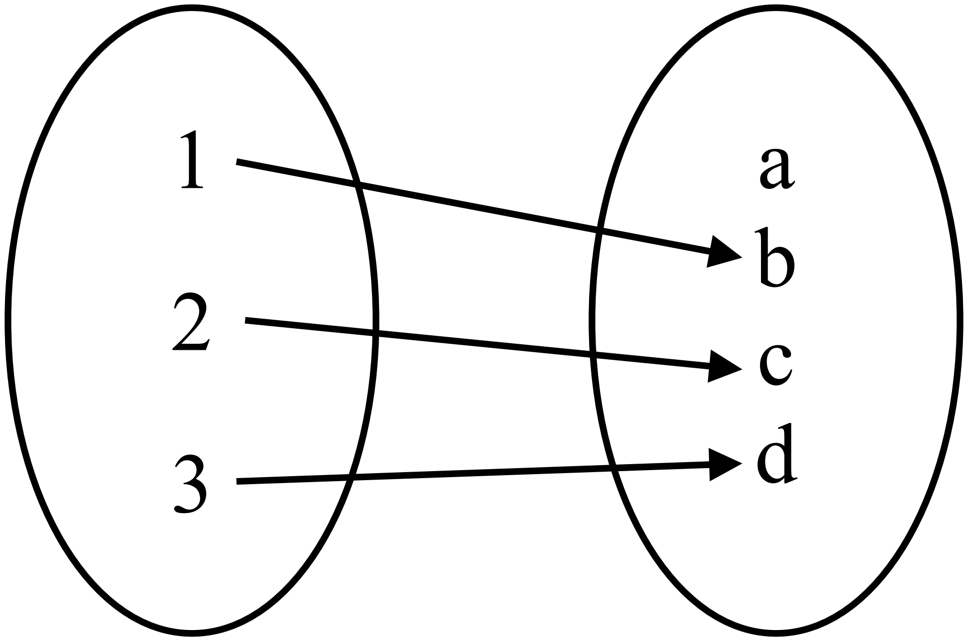


Función Total

Si todos los elementos de un conjunto X se asocian con un elemento de Y mediante una función f: X→Y , entonces se dice que f es una ***función total***.

No todas las funciones parciales son funciones totales.

Función Total



Función Identidad

La ***función identidad*** transforma cada valor en sí mismo, esto es $f(x) = x$.

Función Constante

La ***función constante*** tiene una sola imagen, por ejemplo $\boldsymbol{c}$ y todos los argumentos se refieren a la misma imagen, si f denota a la función constante se tiene: $f(x) = \boldsymbol{c}$.

Propiedades de las Funciones

Tipos de Función

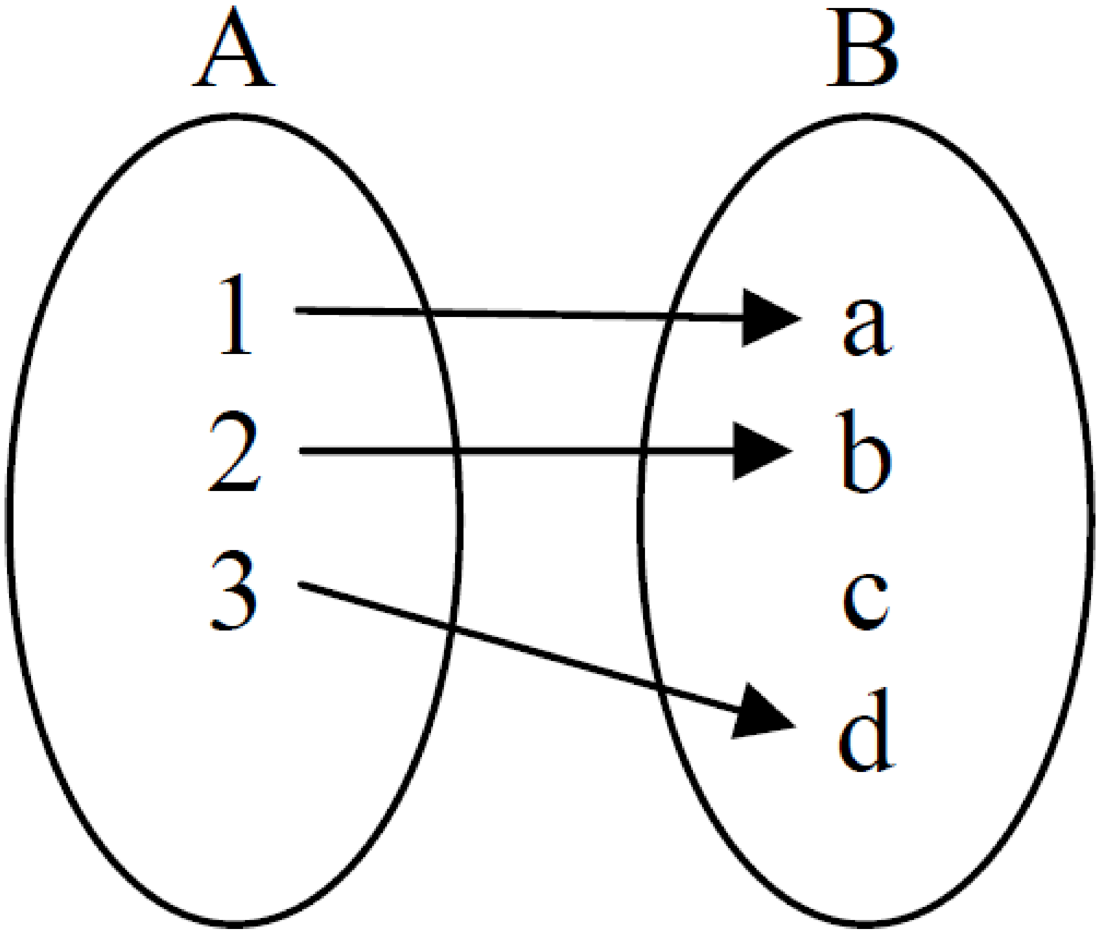
- Función ***Inyectiva.***
- Función ***Sobreyectiva***
- Función ***Biyectiva***

Función Inyectiva

Una función $f{:}A \rightarrow B$ es ***inyectiva*** si a cada valor del ***conjunto inicial*** le corresponde un valor distinto en el ***conjunto final*** de la función f.

No puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

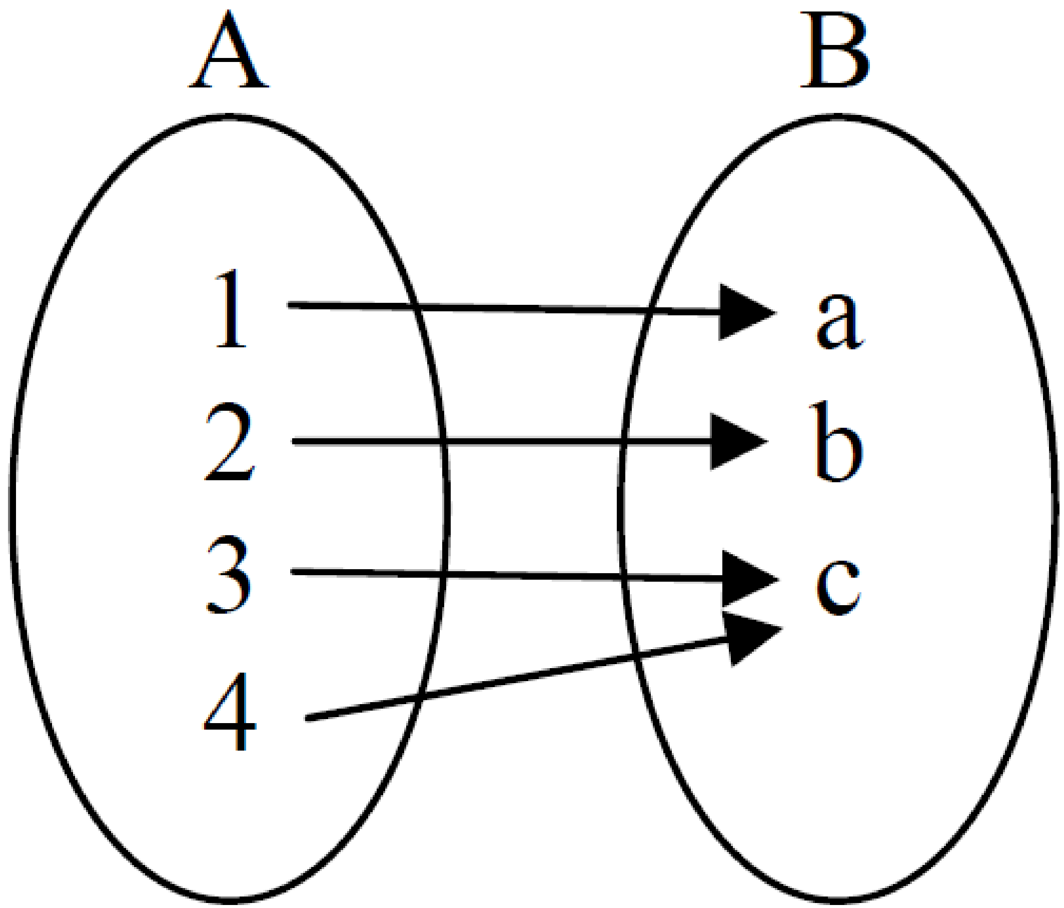
Función Inyectiva



Función Sobreyectiva

Una función $f : A \rightarrow B$ es, ***sobreyectiva*** cuando cada elemento del ***conjunto final*** es la imagen de como mínimo un elemento del ***conjunto inicial***.

Función Sobreyectiva

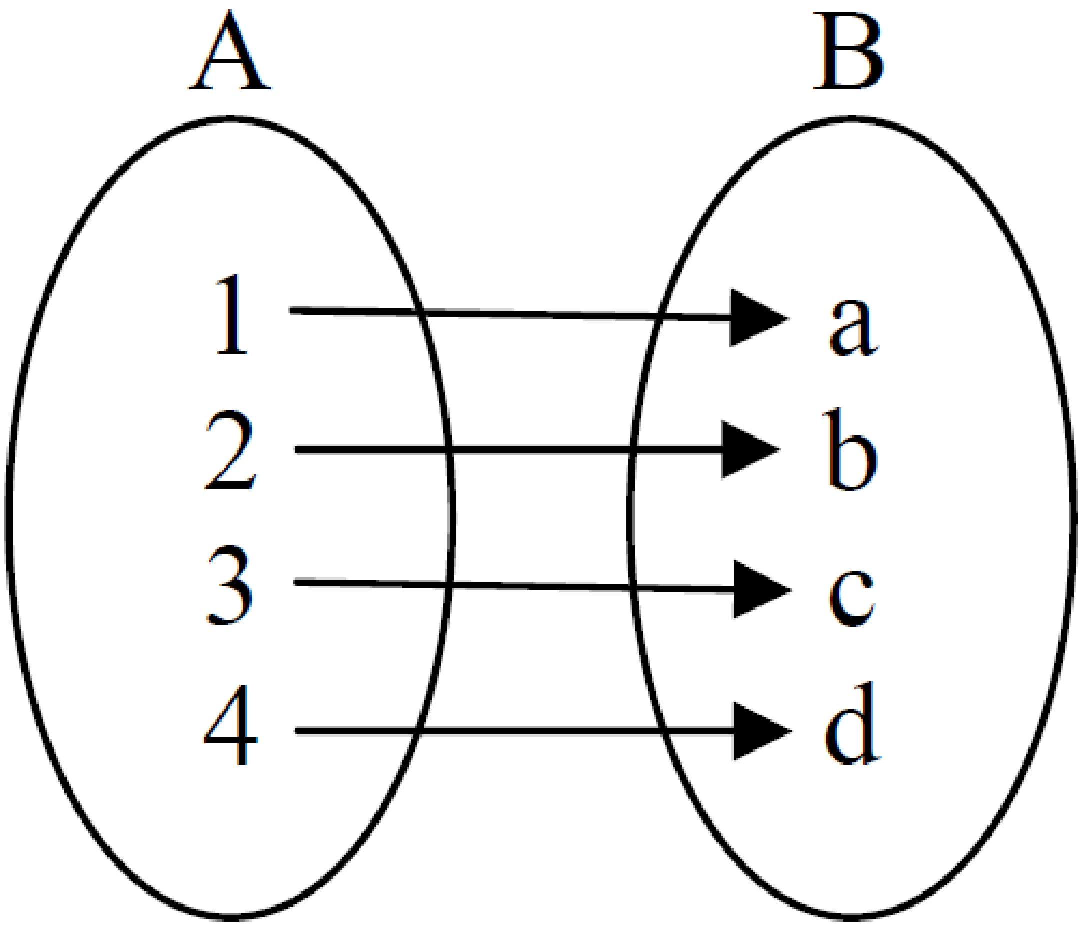


Función Biyectiva

Una función f: $A \rightarrow B$ es, ***biyectiva*** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva.

Es una relación uno a uno.

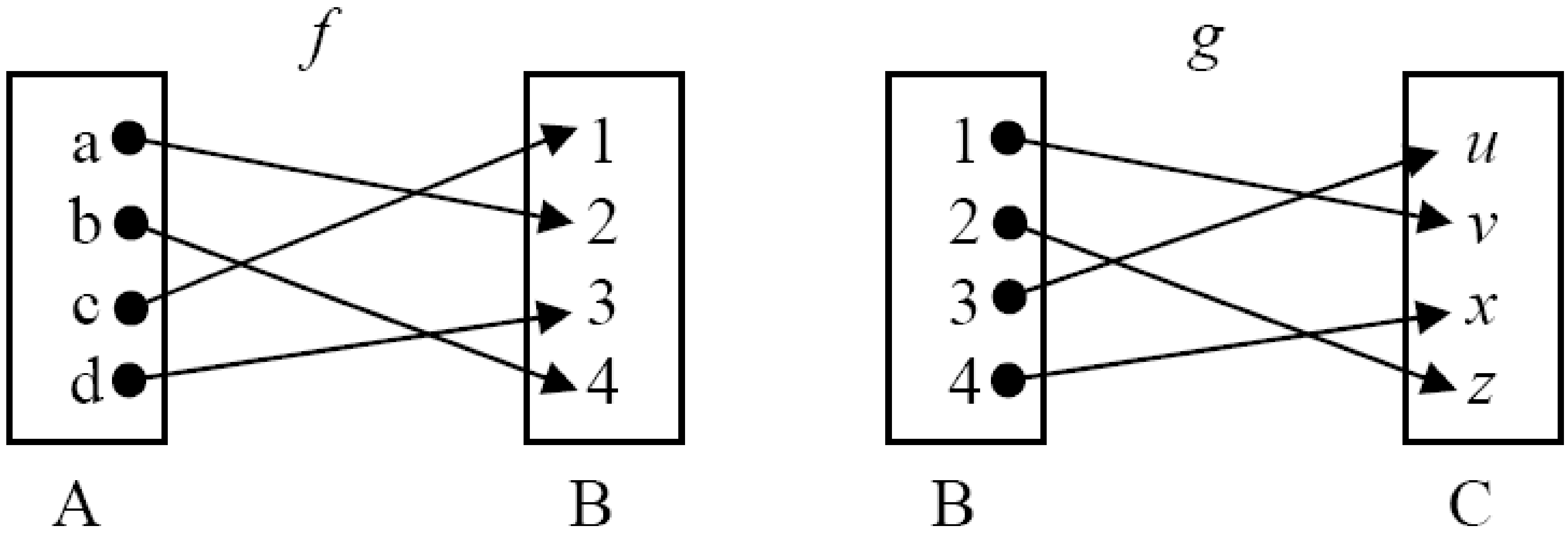
Función Biyectiva



Composición

Si tenemos dos funciones: *f(x)* y *g(x)*, de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de *f(x)* el valor de *g[f(x)]*.

Composición



Función Inversa

Partimos de una función $f : A \to B$ que tiene que ser ***biyectiva***.

La función inversa será $f^{-1} : B \to A$

Funciones Especiales

- Función mínimo
- Función máximo
- Función parte entera
- Función signo
- Función división entera
- Función módulo

Cardinalidad

El **cardinal** de un conjunto X es su número de elementos y se representa por $|X|$.

Si el conjunto es infinito no podemos decir cuántos elementos tiene.

Conjuntos Equipotentes

Si tenemos dos conjuntos X e Y.

Tienen la misma cardinalidad si se establece una biyección entre X e Y.

Notación: $|X| = |Y|$

Si no son iguales: $|X| \neq |Y|$

Menor o Igual Cardinaliad

Si tenemos dos conjuntos X e Y.

X ***tiene menor o igual cardinalidad*** que Y si existe una función inyectiva de X en Y.

Notación: $|X| \leq |Y|$

Menor Cardinaliad

Si tenemos dos conjuntos X e Y.

X ***tiene menor cardinalidad*** que *Y* si *X* es menor estricto que *Y*.

Notación: $|X| < |Y|$

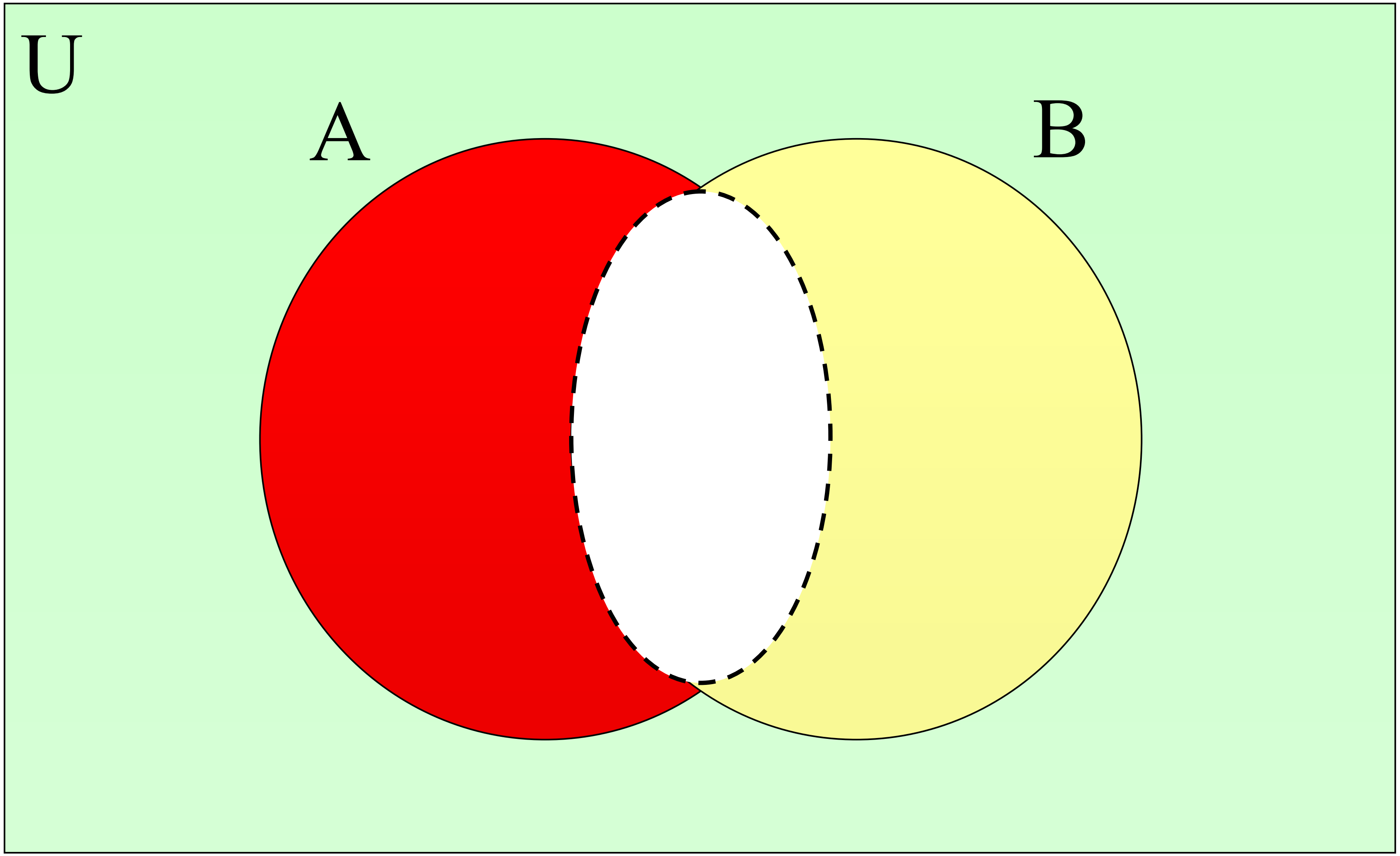
Fórmulas Cardinalidad

Si dos conjuntos A y B son disjuntos, el cardinal de la unión es igual a la suma de los cardinales.

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right|$$

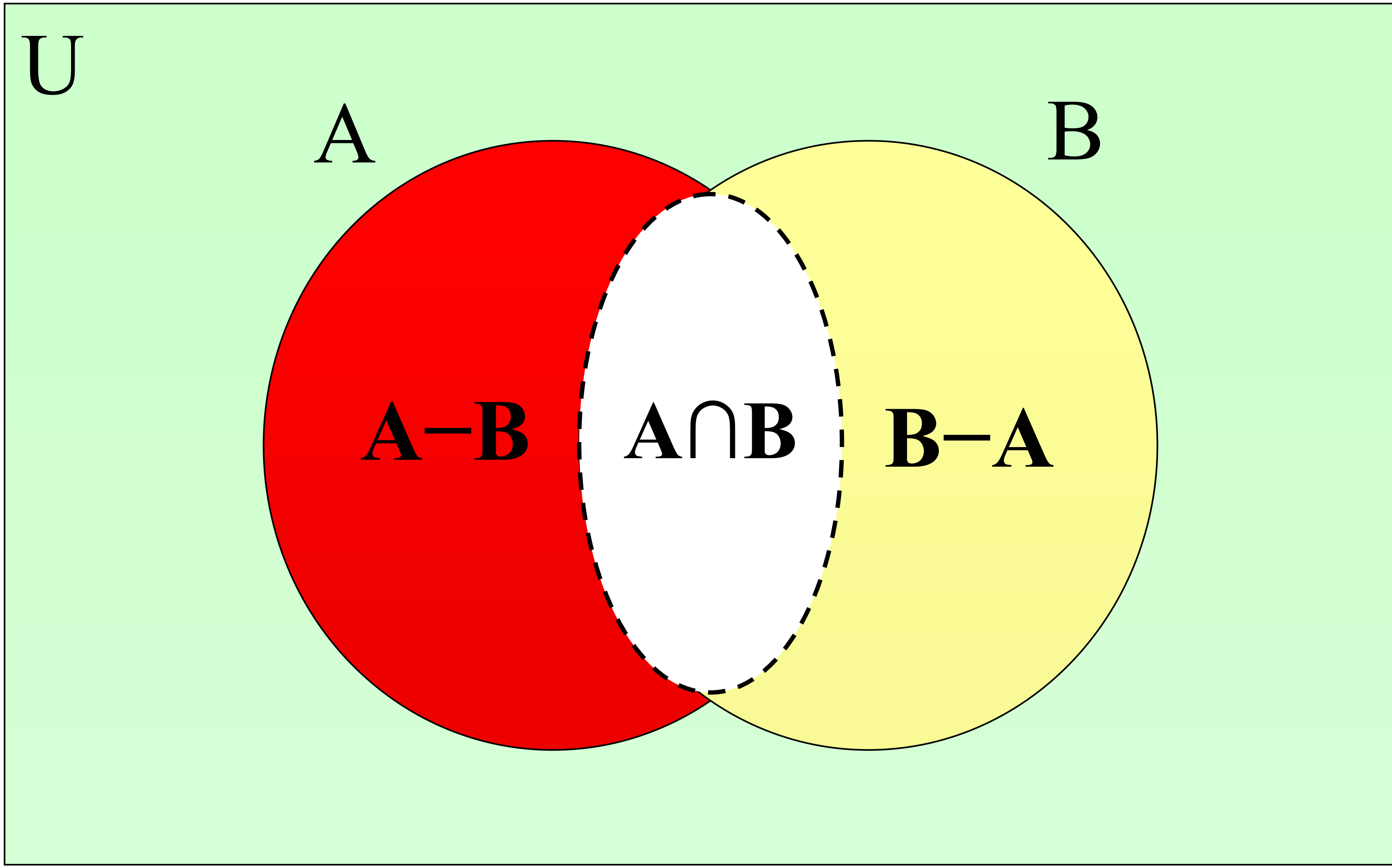
En el caso que haya elementos comunes:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$


U
A
B

Podemos razonar la fórmula de otra manera:

$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$$


U
A
B
A−B
A∩B
B−A

Tenemos que $\#(A) = \#(A - B) + \#(A \cap B)$,

siendo $(A - B)$ y $(A \cap B)$ disjuntos, por lo tanto:

$$\#(A) = \#(A - B) + \#(A \cap B)$$

$$\#(B) = \#(B - A) + \#(A \cap B)$$

Homomorfismos

Tenemos dos funciones $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$.

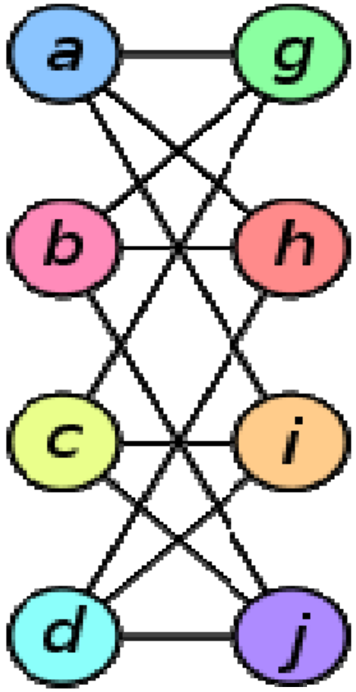
Si existe una función $h\colon X \to Y$ tal que $g(h(x)) = h(f(x))$ entonces se dice que f y g son ***homomorfas***, y que h es un ***homomorfismo***.

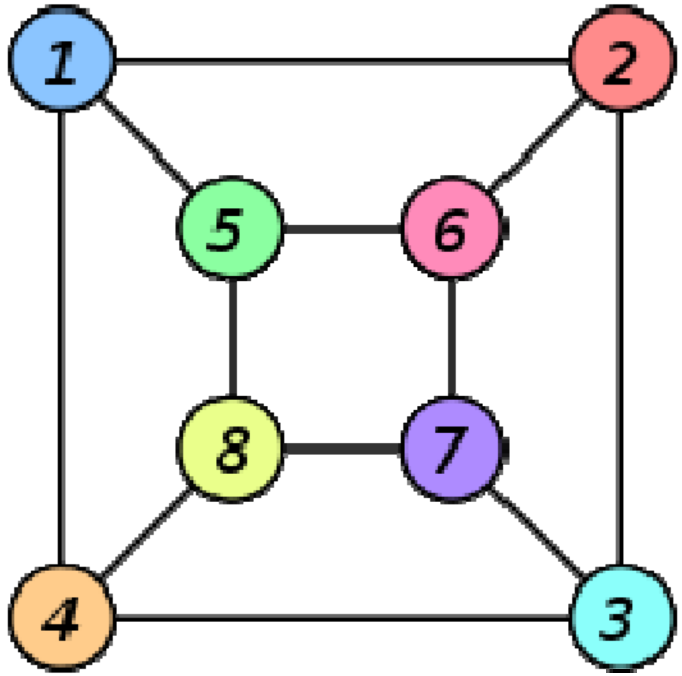
Isomorfismo

Sean dos funciones $f{:}X\rightarrow X$ y $g{:}Y\rightarrow Y$ que son ***homomorfas***, y sea h su ***homomorfismo***.

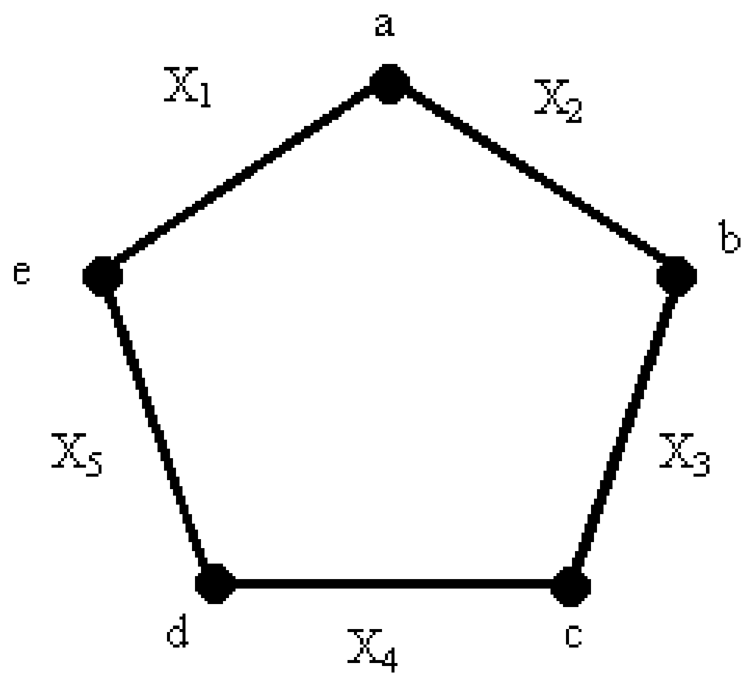
Si h es ***biyectiva*** entonces se dice que f y g son ***isomorfas***, y que h es un ***isomorfismo***.

G y G´ son isomorfos, y son matemáticamente iguales, solo varia la apariencia, se mantienen las adyacencias, estructura, caminos y ciclos.

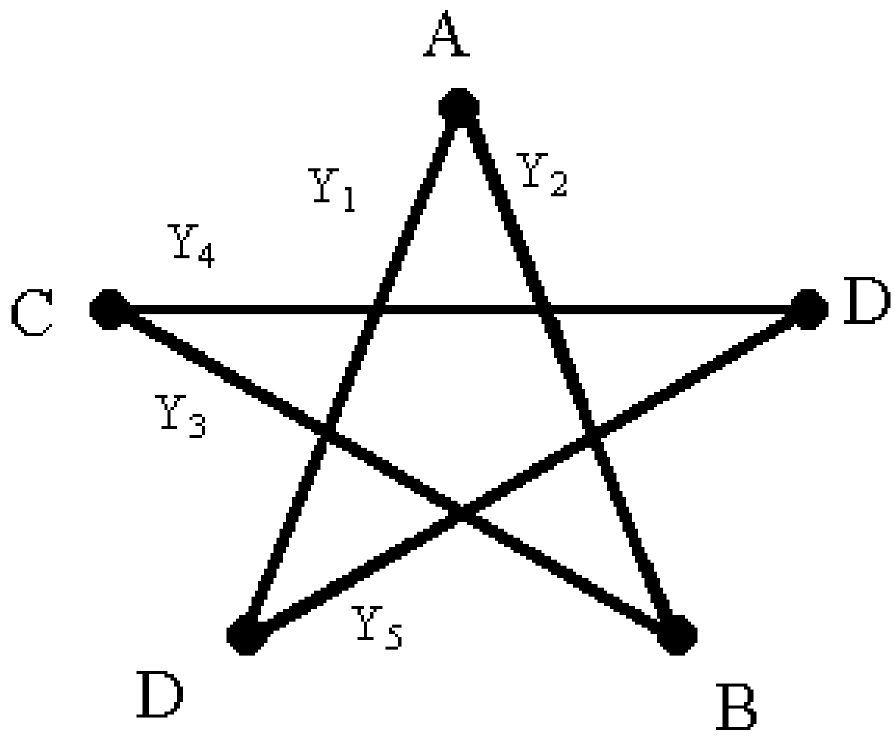




Sean los siguientes grafos $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$



G_1



G_2

Endomorfismo

Sean dos funciones $f{:}X\rightarrow X$ y $g{:}Y\rightarrow Y$ que son ***homomorfosmas***, y sea h su ***homomorfismo***.

Si $X = Y$ entonces se dice que f y g son ***endomorfas***, y que h es un ***endomorfismo***.

Automorfismo

Sean dos funciones f:$X \rightarrow X$ y g:$Y \rightarrow Y$ que son ***isomorfosmas***, y sea h su ***isomorfismo***.

Si $X = Y$ entonces se dice que f y g son ***automorfas***, y que h es un ***automorfismo***.