Centro Asociado Palma de Mallorca

Lógica y Estructuras Discretas

Tutor: Antonio Rivero Cuesta

Tema 1

Lógica de Proposiciones

y de

Predicados de Primer Orden

Lógica de Proposiciones

Sintaxis

- Infinitas letras proposicionales: p, q, r, s. . .
- Símbolos lógicos:
  - constantes ($\bot$,$\top$)
  - conectiva monaria ($\neg$)
  - conectivas binarias ($\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$)
- Dos símbolos auxiliares de puntuación: *paréntesis izquierdo* ‘**(**’ y *derecho* ‘**)**’.

Conectivas

Enunciado	$\bot, \top$	Falso, Verdadero	
Negación	$\neg$	No *p*	$\neg p$
Conjunción	$\wedge$	*p* y *q*	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$
Disyunción	$\vee$	*p* o *q*	$\mathrm{p} \vee \mathrm{q}$
Condicional	$\rightarrow$	Si *p* entonces *q*	$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	*p* si y sólo si *q*	$\mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{q}$

Semántica de las Conectivas

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1 1	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	0	0
0 1	1	0	1	1	0
0 0	1	0	0	1	1

Tablas de Verdad

La tabla de verdad es una enumeración completa del valor de la fórmula para cada asignación distinta.

A una ***fórmula verdadera*** para toda interpretación se le denomina ***tautología***.

A una ***fórmula falsa*** para toda interpretación se le denomina ***contradicción***.

A las ***fórmulas*** que no son ni tautología ni contradicción se las suele denominar ***contingentes***.

Satisfacibilidad

Validez

Consecuencia

Equivalencia

Satisfacibilidad

Una interpretación satisface una o varias fórmulas cuando éstas se evalúan como verdaderas en esa interpretación o línea.

Sobre la tabla de verdad, cualquier ***línea*** donde una fórmula se evalúa como 1 satisface esa fórmula.

Basta que ***al menos exista una línea*** donde se satisfaga simultáneamente un conjunto de fórmulas para afirmar que es ***satisfacible***.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$(p \wedge q) \wedge \neg (q \vee r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Una fórmula insatisfacible y dos satisfacibles

$\boldsymbol{p\ q\ r}$	$p \to (q \lor r)$	$(p \land q) \lor r$	$r \to (r \lor p)$
1 1 1	1	1	1
1 1 0	1	1	1
1 0 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
0 1 1	1	1	1
0 1 0	1	0	1
0 0 1	1	1	1
0 0 0	1	0	1

Conjunto $= \{p \to (q \lor r), (p \land q) \lor r, r \to (r \lor p)\}$ satisfacible

p q r	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$\neg (r \vee p)$
1 1 1	1	1	0
1 1 0	1	1	0
1 0 1	1	0	0
1 0 0	0	0	0
0 1 1	1	0	0
0 1 0	1	0	1
0 0 1	1	0	0
0 0 0	1	0	0

El conjunto $\Omega = \{p \rightarrow (q \vee r), (p \wedge q), \neg (r \vee p)\}$ es insatisfacible

El método más directo para decidir la satisfacibilidad de una fórmula o de un conjunto consiste en recorrer todas las interpretaciones de la tabla de verdad, hasta producir:

- **Un resultado afirmativo** es satisfacible, basta encontrar la primera interpretación satisfactoria.
- **Un resultado negativo** no es satisfacible hay que recorrer todas las interpretaciones posibles.

Si en un conjunto de fórmulas aparecen ***n*** letras proposicionales, el número de interpretaciones distintas es $\boldsymbol{2^n}$.

Validez

Una fórmula válida es aquélla que es verdadera frente a cualquier interpretación.

Las tautologías son fórmulas válidas.

Para expresar que una fórmula φ es válida se utilizará la notación $\models \varphi$.

Para ***decidir la validez de una fórmula***, el procedimiento semántico extensivo requiere recorrer toda la tabla de verdad.

Consecuencia

Una descripción informal de *"**ser consecuencia lógica de**"* es:

Todas las líneas en donde las fórmulas denominadas ***premisas*** sean verdaderas necesariamente la última, denominada ***conclusión***, también debe serlo.

$\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{r}$	$\neg p \vee q$	$p \vee r$	$q \vee r$
1 1 1	1	1	1
1 1 0	1	1	1
1 0 1	0	1	1
1 0 0	0	1	0
0 1 1	1	1	1
0 1 0	1	0	1
0 0 1	1	1	1
0 0 0	1	0	0

Tabla 4: Consecuencia $\{(\neg p \vee q), (p \vee r)\} \vDash (q \vee r)$

Consideramos el siguiente conjunto de fórmulas.

X_1: $p \vee q$

X_2: $p \rightarrow r$

X_3: $q \rightarrow r$

X_4: r

Se pueden plantear las siguientes tres preguntas:

1. Es consecuencia: $X_1, X_2, X_3 \models X_4$
2. Es insatisfacible $\{ X_1, X_2, X_3, \neg X_4\}$
3. Es tautología $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \rightarrow X_4$

La ***insatisfacibilidad*** de $\{X_1, X_2, X_3, \neg X_4\}$

Implica que es efectivamente ***consecuencia*** de:

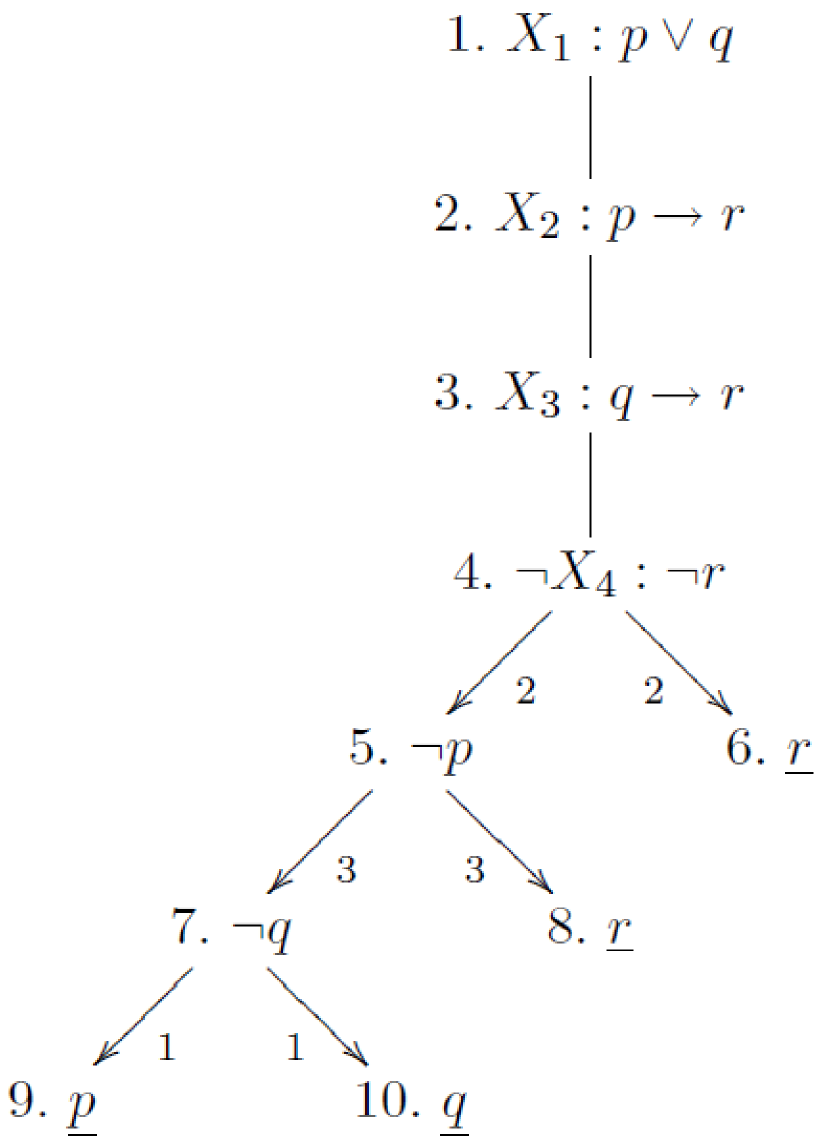
$$X_1, X_2, X_3 \models X_4$$

Se puede afirmar que son consecuencias:

$$X_1, X_2, \neg X_4 \models \neg X_3$$

$$\neg X_4, X_2, X_3 \models \neg X_1$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	$\neg X_4$
pqr	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	r	$\neg r$
000	0	1	1	0	1
001	0	1	1	1	0
010	1	1	0	0	1
011	1	1	1	1	0
100	1	0	1	0	1
101	1	1	1	1	0
110	1	0	0	0	1
111	1	1	1	1	0



Ejemplo ***insatisfacible*** $\{(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r), \neg r\}$

Comprobación de Consecuencia

Si se desea comprobar una relación de consecuencia, como X_1, X_2, $X_3 \models X_4$, hay que negar la supuesta consecuencia, X_4, antes de introducirla en el conjunto de nodos iniciales.

Lo que el ***tableau*** comprueba es que un determinado conjunto, $\{X_1, X_2, X_3, \neg X_4\}$ en este caso, es insatisfacible.

Comprobación de Insatisfacibilidad

Suponga que en un examen la pregunta que se plantea es "¿es insatisfacible el conjunto de fórmulas Ω?".

Entonces hay que situar todas las fórmulas de Ω como nodos iniciales, sin manipular (negar) ninguna.

Equivalencia

Dos fórmulas, φ y Ψ, son equivalentes si $\varphi \vDash \Psi$ y $\Psi \vDash \varphi$.

Sobre la tabla de verdad, dos fórmulas equivalentes tienen exactamente los mismos valores de verdad sobre cada línea.

Escribiremos $\varphi \equiv \Psi$ cuando ambas fórmulas sean equivalentes y $\varphi \not\equiv \Psi$ cuando no lo sean.

p q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1 1	0	1	1
1 0	0	0	0
0 1	1	1	1
0 0	1	1	1

Equivalencias Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Bicondicional

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Leyes de Transposición

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg q \leftrightarrow \neg p$$

Lógica de Predicados Monádicos Sintaxis

El alfabeto de un lenguaje de Primer Orden incluye:

Símbolos comunes:

- variables: $Var = \{x, y, z \ldots\}$
- conectivas: $\{\bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$
- cuantificadores: $\{\forall, \exists\}$
- símbolos de puntuación: paréntesis y comas
- símbolo de igualdad: $\{\approx\}$

Símbolos propios:

- un conjunto de constantes: $\mathcal{C} = \{a, b, \ldots\}$
- un conjunto de funciones: $\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$
- un conjunto de relaciones: $\mathcal{R} = \{R, S, \ldots\}$

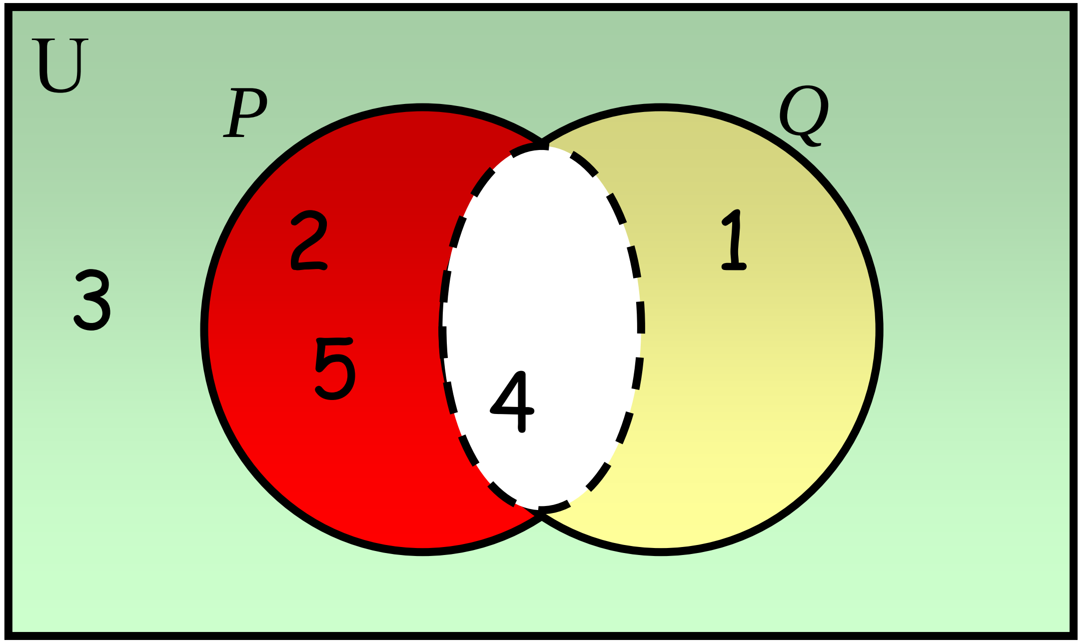
Semántica

1. Seleccionar un conjunto U no vacío, cualquiera.
2. Por cada predicado monádico, como *P(x)*, debe escoger un subconjunto de U.
3. Cada interpretación de este lenguaje debe fijar qué subconjuntos del universo son *P* y *Q* y qué elementos del universo son *a*, *b* y *c*.
4. Buscar que elementos tienen la propiedad ***P***, ***Q***,…
5. Debemos valorar si la fórmula completa es verdadera o falsa.

Ejemplos de Lógica de Predicados Monádicos

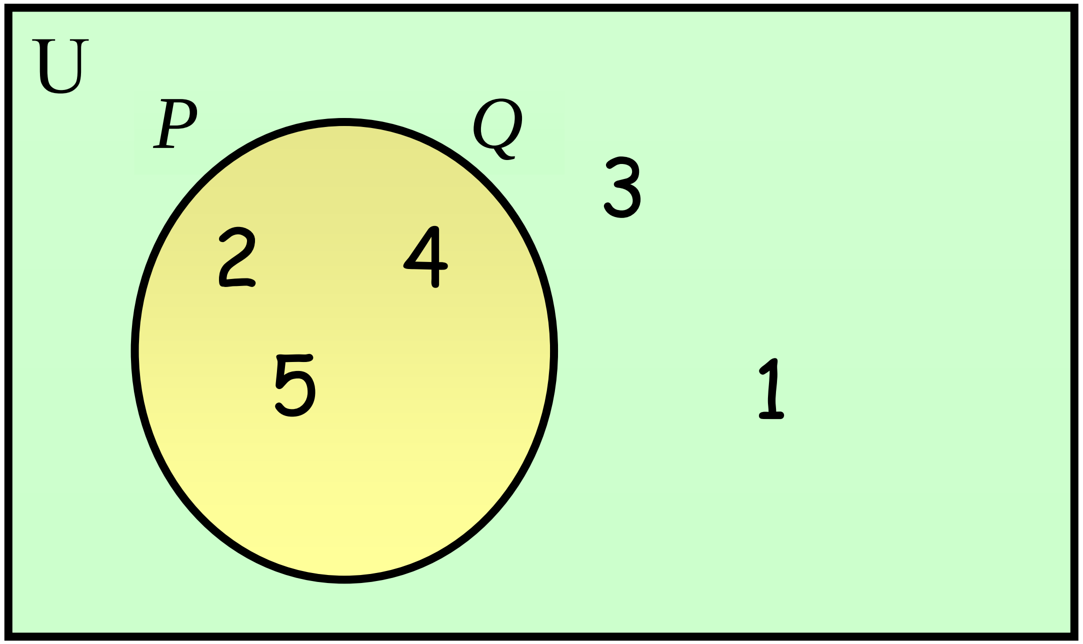
$$U = \{1,2,3,4,5\};$$
$$P = \{2,4,5\};\ \ Q = \{1,4\};$$
$$a = 1;\ \ b = 4$$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{F} \wedge \mathbf{V}$	**F**
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F}$	**F**
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$	**V**
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{V}$	**F**



$$U = \{1,2,3,4,5\};$$
$$P = \{2,4,5\};\ \ Q = \{2,4,5\};$$
$$a = 1;\ \ b = 4$$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{F} \wedge \mathbf{V}$	**F**
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F}$	**F**
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$	**V**
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{V}$	**F**

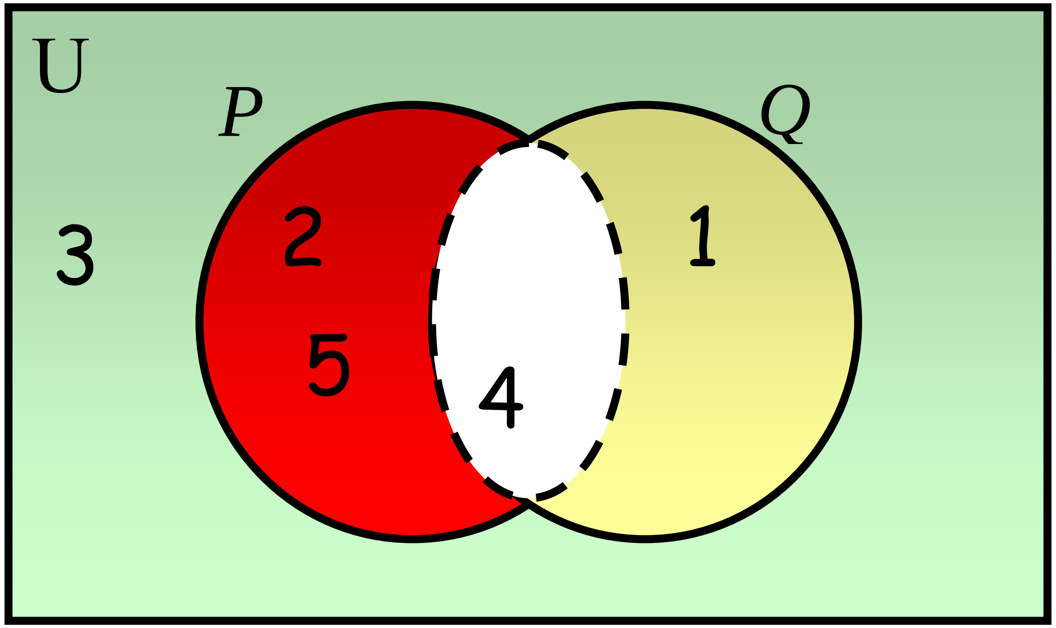


$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5\};$$

$$P = \{2,4,5\};\ \ Q = \{1,4\};$$

$$a = 4;\ \ b = 4$$

$Pa \wedge Qb$	$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$Pa \vee \neg Qb$	$\mathbf{V} \vee \mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$Pa \rightarrow Qb$	$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$Pa \leftrightarrow Qb$	$\mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{V}$	$\mathbf{V}$



Sintaxis de los Cuantificadores

Cuantificador Universal

$\forall$ “***para todo***”

Cuantificador Existencial

$\exists$ “***existe***”

Además vamos a trabajar con el conjunto de las variables: $\{x, y, z...\}$.

Que nos van a servir para completar el cuantificador y rellenar los términos de un predicado monádico, diádico, etc.

Universal Afirmativo:	$\forall x Px$	Todos los x son P.
Universal Negativo:	$\forall x \neg Px$	Ningún x es P.
Universal:	$\neg \forall x Px$	No todos los x son P.

Existencial Afirmativo:	$\exists x Px$	Algún x es P.
Existencial Negativo:	$\exists x \neg Px$	Algún x no es P.
Existencial:	$\neg \exists x Px$	Ningún x es P.

Equivalencias Cuantificadores

$$\forall x Px \equiv \neg \exists x \neg Px$$

$$\exists x Px \equiv \neg \forall x \neg Px$$

$$\forall x \neg Px \equiv \neg \exists x Px$$

$$\exists x \neg Px \equiv \neg \forall x Px$$

Variables Libres y Ligadas

Si una fórmula es de la forma $(\forall x\varphi)$ o $(\exists x\varphi)$ se dice que φ es el ámbito de ese cuantificador.

Todas las apariciones de una variable x, en el ámbito de un cuantificador para esa variable, $(\forall x\varphi)$ o $(\exists x\varphi)$, se denominan ligadas.

En una fórmula sin cuantificadores ninguna variable está ligada.

Semántica de los Cuantificadores

$$\forall x P x$$

Todos los elementos x tienen la propiedad P

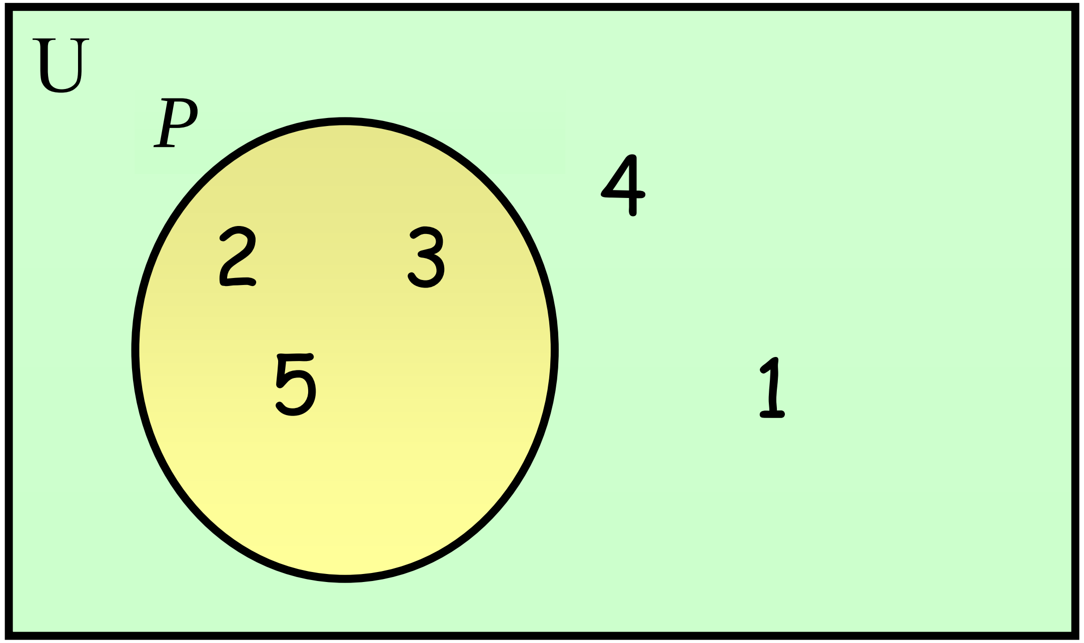
Px tenemos que evaluarlo para todas las opciones posibles del universo.

$$U = \{1,2,3,4,5\}; \quad P = \{2,3,5\};$$

Fórmula falsa para este universo e interpretación.

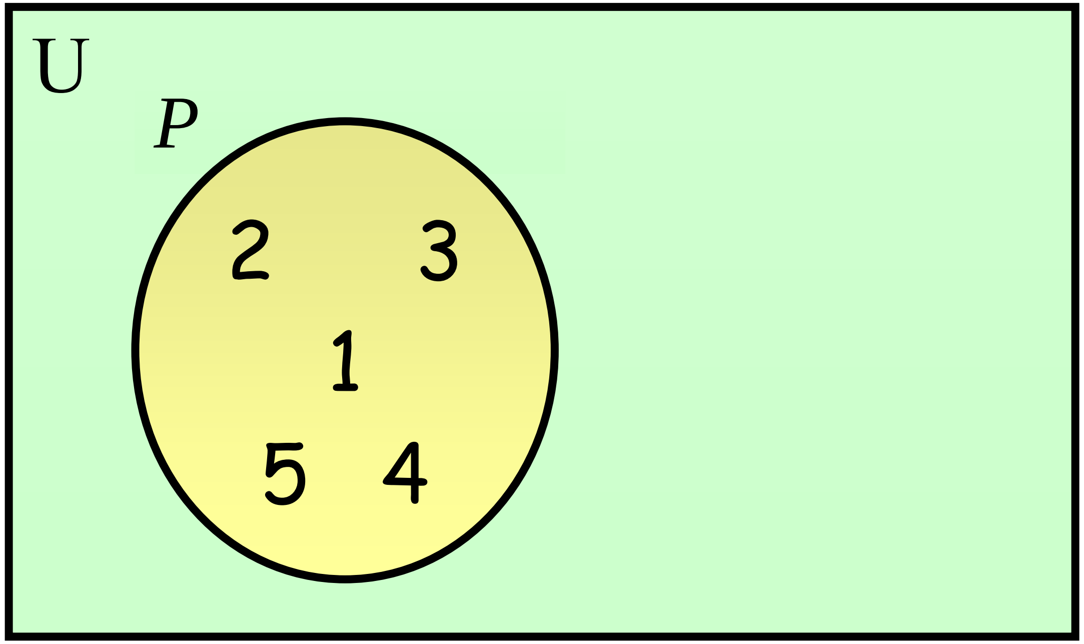
$$\forall x P x$$

$$\text{U} = \{1,2,3,4,5\};\ \ P = \{2,3,5\};$$



$$\forall x P x$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5\}; \quad P = \{1,2,3,4,5\};$$



$$\forall x \neg Px$$

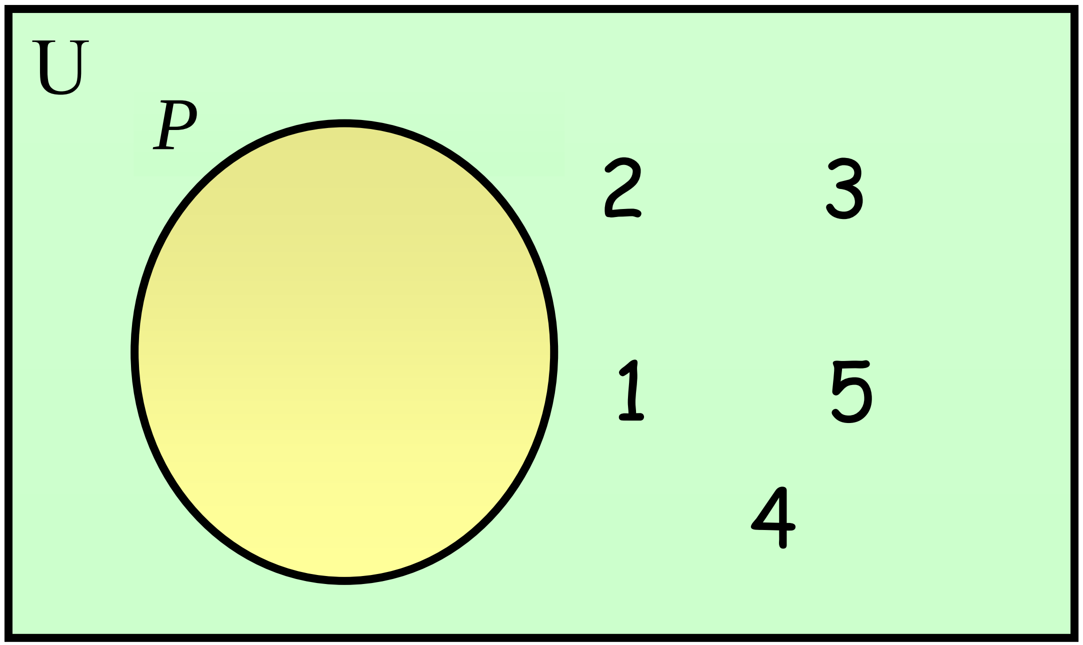
Ningún elemento tiene la propiedad P

U = {1,2,3,4,5}; $P = \varnothing$

Es una fórmula verdadera.

$$\forall x \neg Px$$

$$U = \{1,2,3,4,5\}; \;\; P = \varnothing$$



$$\neg\forall x Px$$

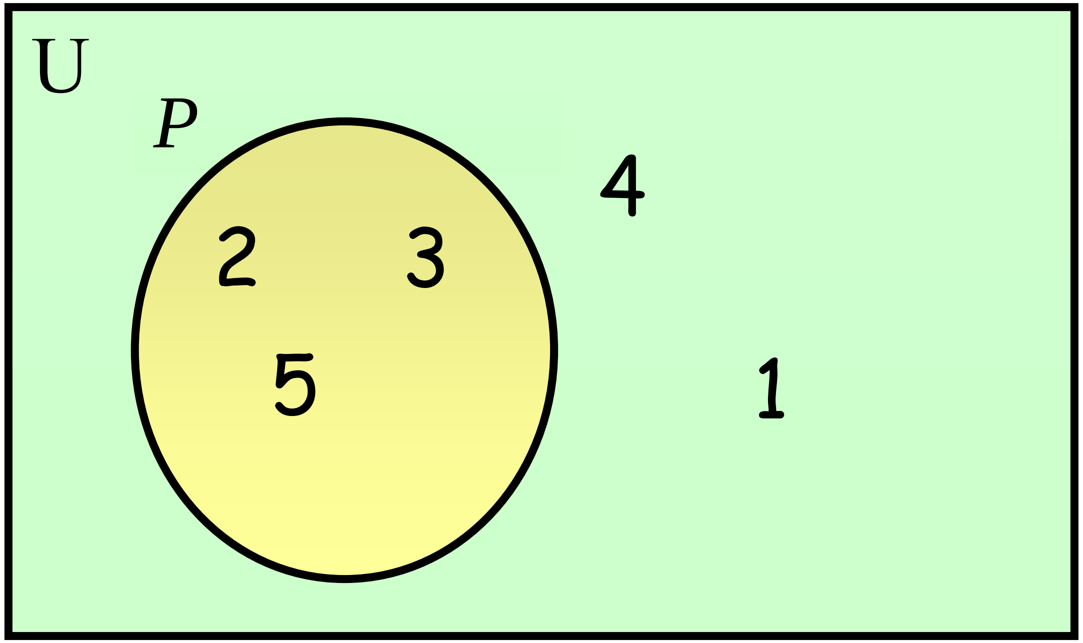
Esta fórmula es verdadera donde $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ es falsa.

Podría representar las frases:

No todos los elementos tienen la propiedad P

$$\neg \forall x P x$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5\};\quad P = \{2,3,5\};$$



$$\exists x P x$$

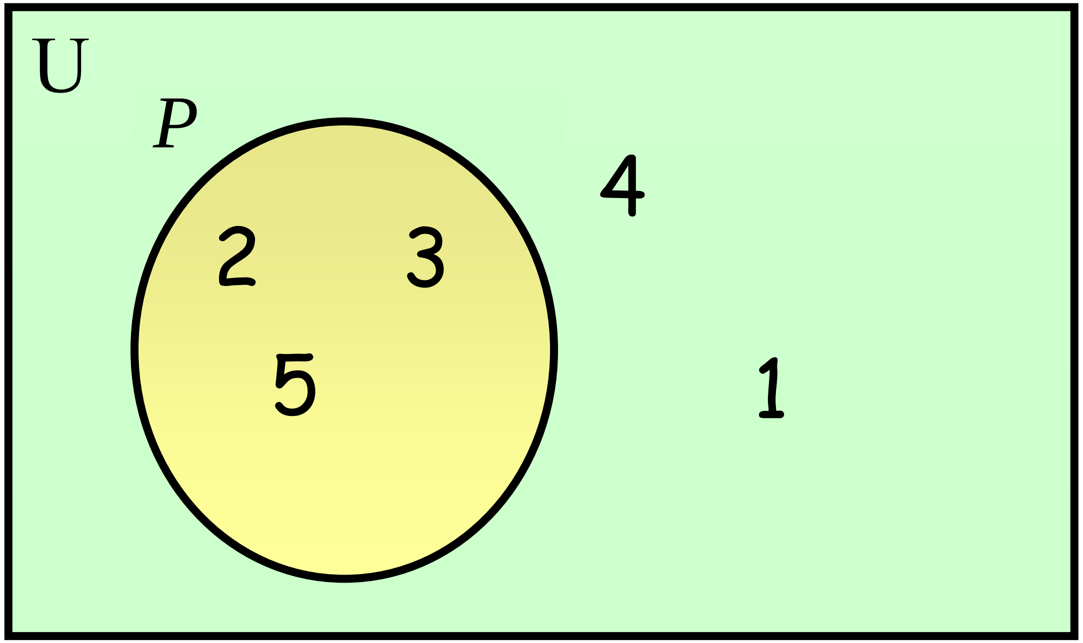
Existe algún elemento del universo que tiene la propiedad P

$U = \{1,2,3,4,5\}; \; P = \{2,3,5\};$

Es sólo verdadera en las estructuras en que ***P*** sea distinto del vacío.

$$\exists x P x$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5\}; \quad P = \{2,3,5\};$$



$$\exists x \neg Px$$

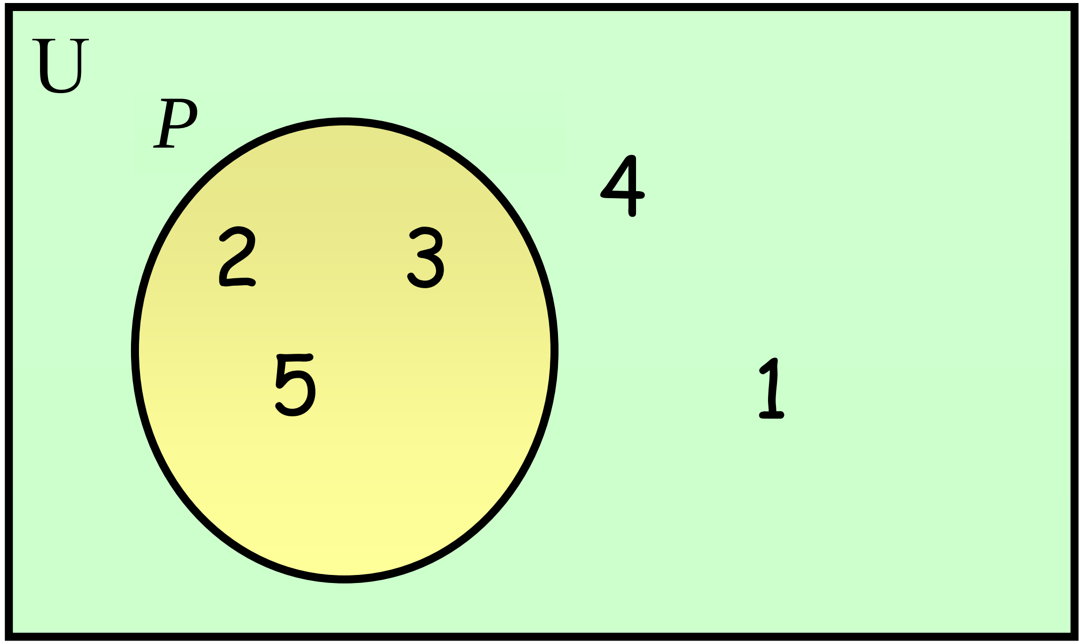
No todos los elementos tienen la propiedad P

Para que esta fórmula sea verdadera basta que exista un elemento que tenga la propiedad $\neg$***P***.

Que esté "***fuera del conjunto P***".

$$\exists x \neg Px$$

$$U = \{1,2,3,4,5\}; \quad P = \{2,3,5\};$$



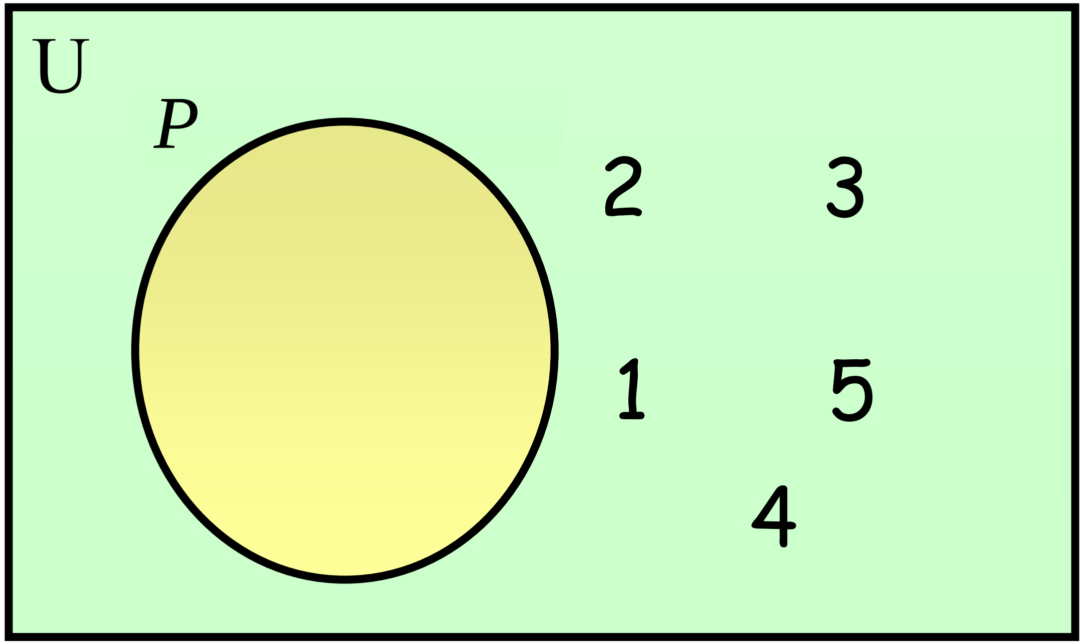
$$\neg \exists x P x$$

Ningún elemento tiene la propiedad P

$$U = \{1,2,3,4,5\};\ \ P = \varnothing$$

$$\neg\exists x P x$$

$$U = \{1,2,3,4,5\};\ \ P = \varnothing$$



$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

Todos los x tienen la propiedad P y la propiedad Q

U = {1,2,3,4}; *P* = {1,2}; *Q* = {1,2,3};

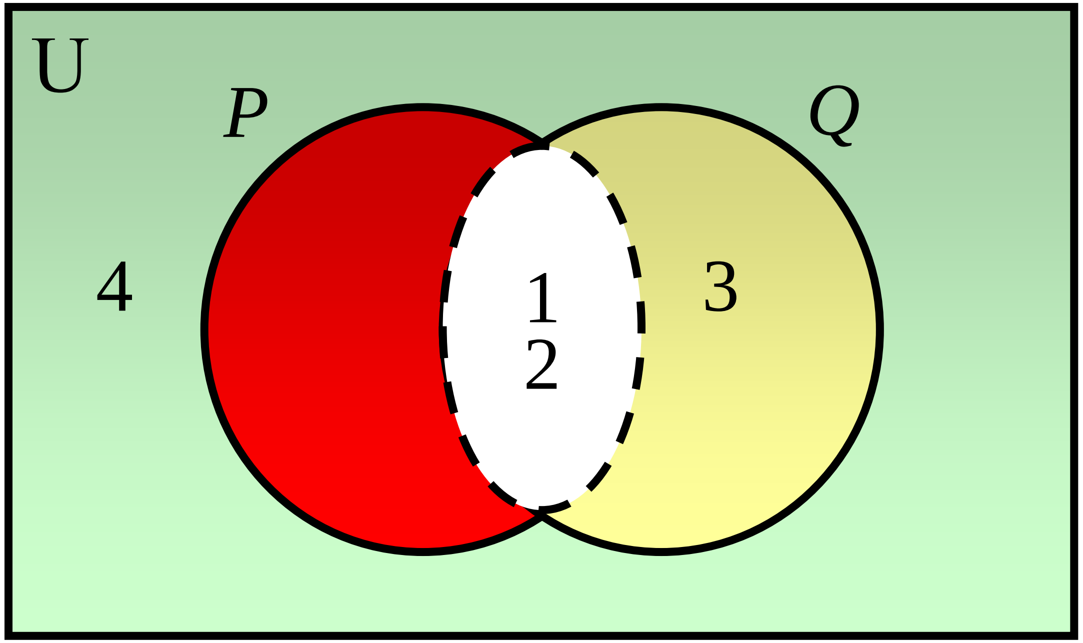
Falso

U = {1,2,3,4}; *P* = {1,2,3,4}; *Q* = {1,2,3,4};

Verdadero

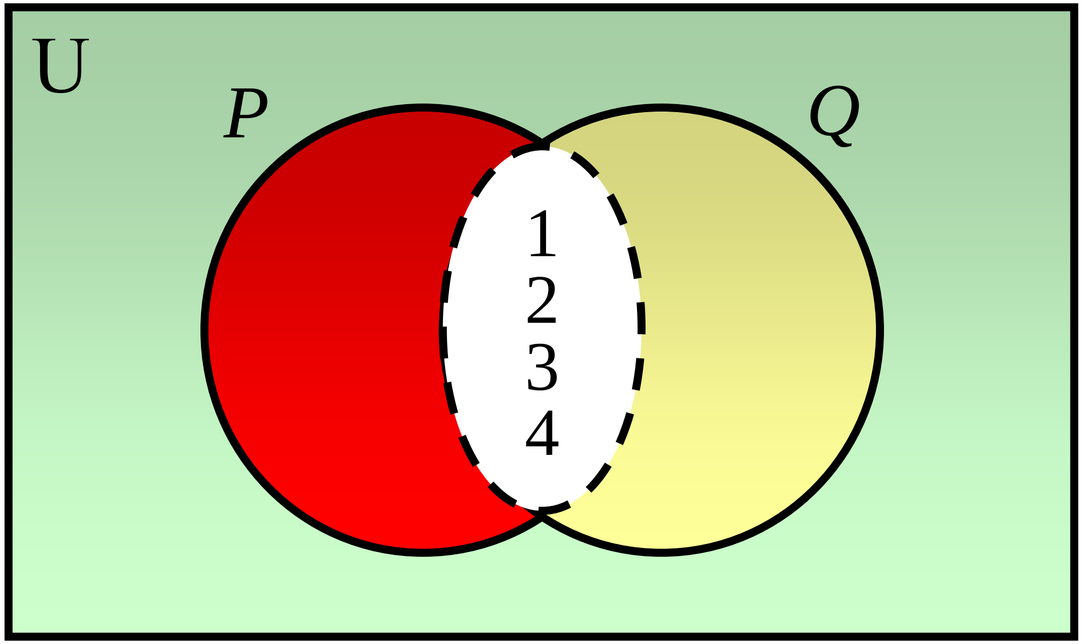
$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

$$U = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{1,2\};\ \ Q = \{1,2,3\};$$



$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2,3,4}; Q = {1,2,3,4};



$$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{Px} \vee \boldsymbol{Qx})$$

Todos los x tienen la propiedad P o bien la propiedad Q o ambas

$$U = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{1,2\};\ \ Q = \{1,2,3\};$$

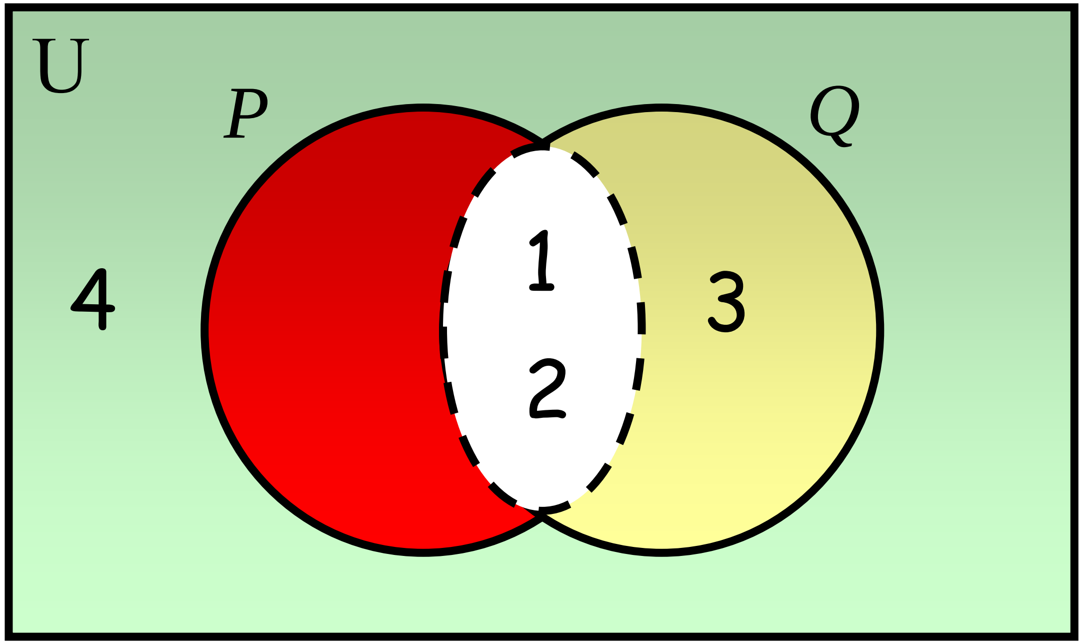
Falso

$$U = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{1,2,4\};\ \ Q = \{1,2,3\};$$

Verdadero

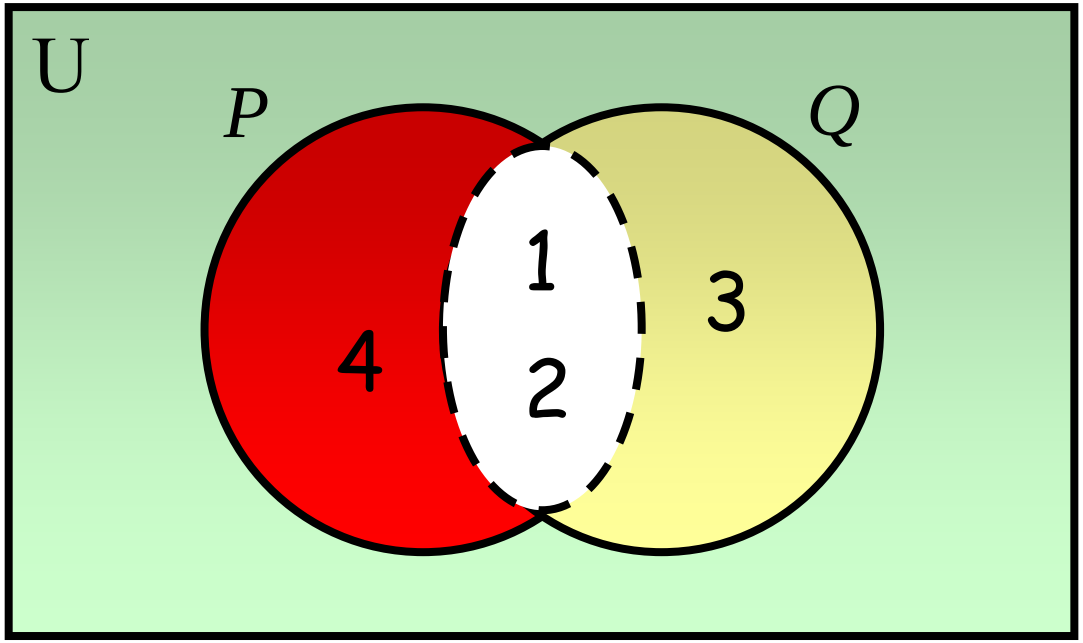
$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \lor \boldsymbol{Qx})$$

$$U = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{1,2\};\ \ Q = \{1,2,3\};$$



$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \vee \boldsymbol{Qx})$$

$\mathrm{U} = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{1,2,4\};\ \ Q = \{1,2,3\};$



$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \rightarrow \boldsymbol{Qx})$$

Todos los P son Q

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};

Verdadero

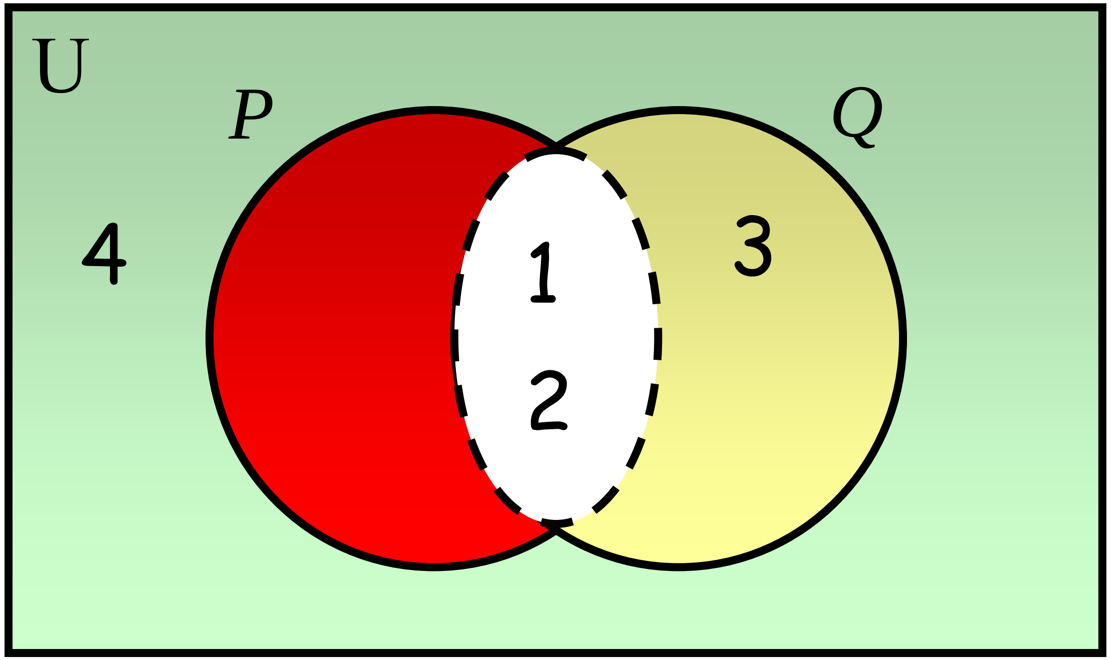
U = {1,2,3,4}; P = {1,2,4}; Q = {1,2,3};

Falso

$$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{Px} \rightarrow \boldsymbol{Qx})$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};

U	$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Px}\rightarrow\boldsymbol{Qx})$	
1	**V→V**	**V**
2	**V→V**	**V**
3	**F→V**	**V**
4	**F→F**	**V**



$$\exists x\ (Px \land Qx)$$

Al menos un elemento pertenece a P y ese mismo elemento pertenece también a Q

Es decir, cuando la intersección de ambos conjuntos no sea vacía.

$$\exists \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};

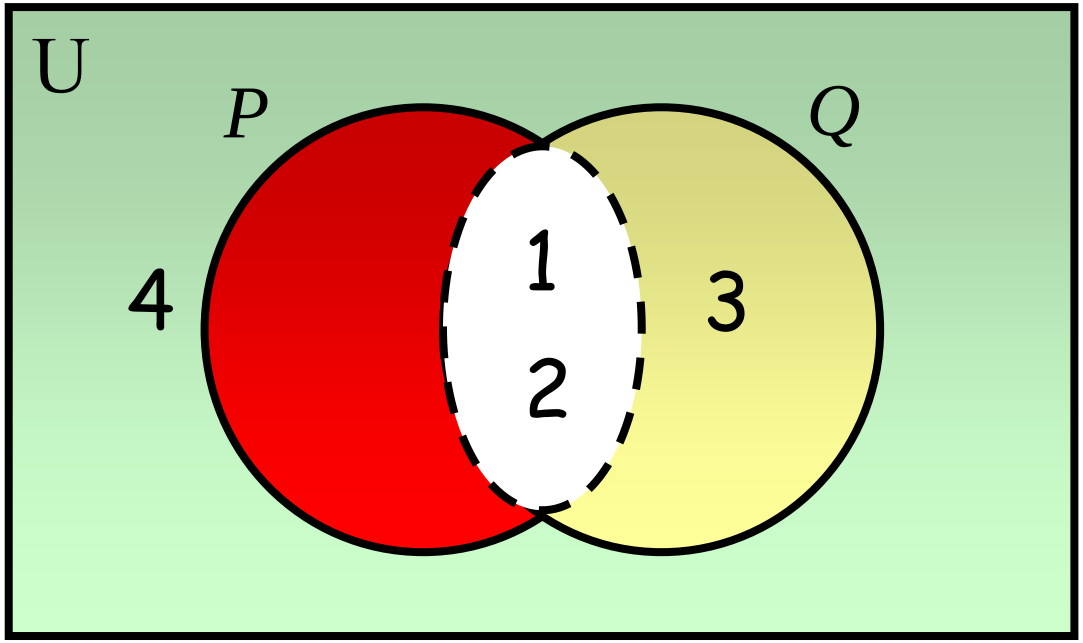
Verdadero

U = {1,2,3,4}; P = {2}; Q = {3};

Falso

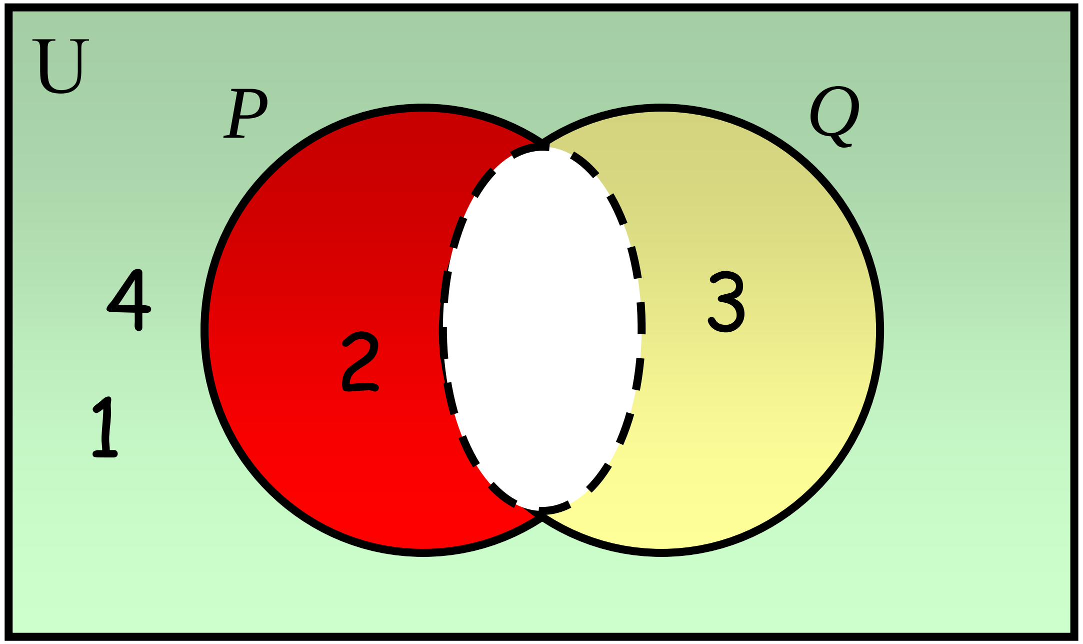
$$\exists x\,(Px \wedge Qx)$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};



$$\exists x\,(Px \wedge Qx)$$

$U = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{2\};\ \ Q = \{3\};$



$$\exists x\,(\boldsymbol{Px} \land \neg \boldsymbol{Qx})$$

Al menos un elemento pertenece a P y ese mismo elemento NO pertenece a Q

U = {1,2,3,4}; *P* = {1,2}; *Q* = {1,2,3};

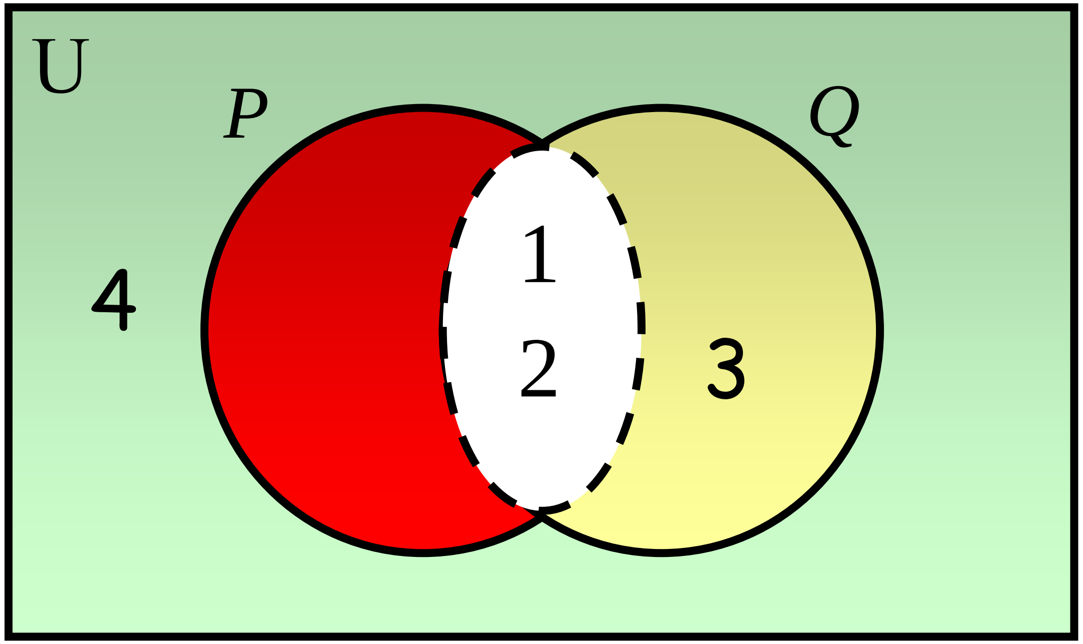
Falso

U = {1,2,3,4}; *P* = {2}; *Q* = {1,3};

Verdadero

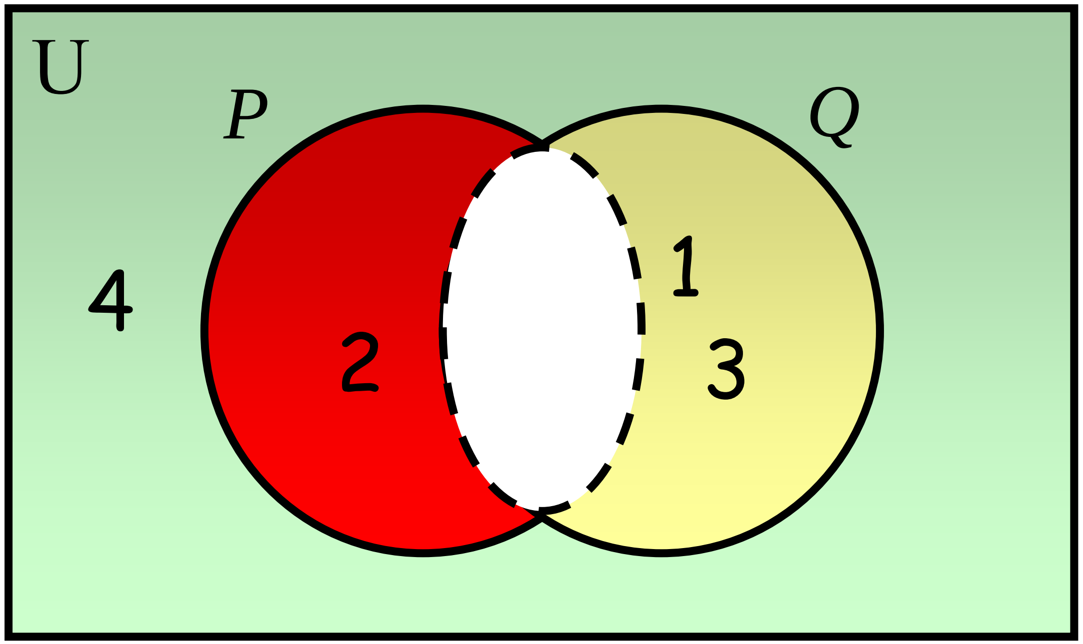
$$\exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$$

$U = \{1,2,3,4\}$; $P = \{1,2\}$; $Q = \{1,2,3\}$;



$$\exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{2\};\ \ Q = \{1,3\};$$



$$\exists \boldsymbol{x} \neg (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

Al menos un elemento NO pertenece a P y ese mismo elemento NO pertenece a Q

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};

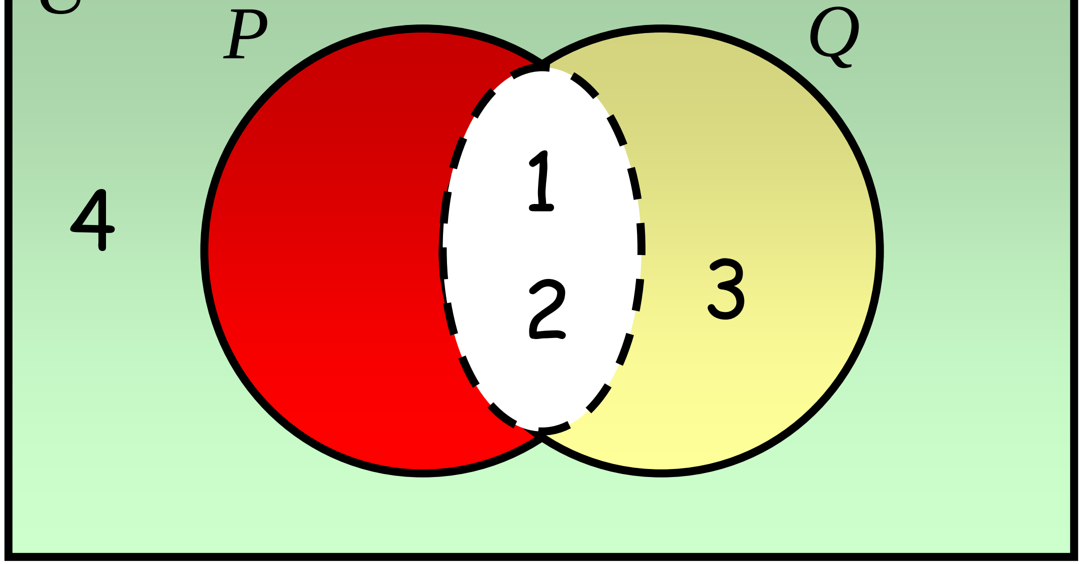
Verdadero

U = {1,2,3,4}; P = {1,2,3,4}; Q = {1,2,3,4};

Falso

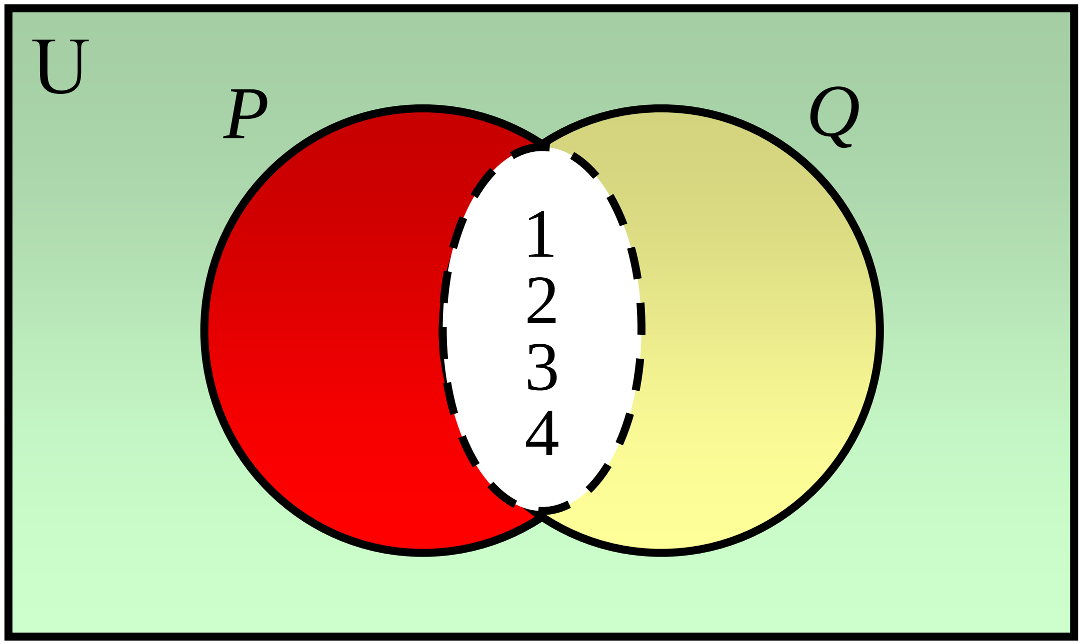
$$\exists x \neg (\boldsymbol{Px} \wedge \boldsymbol{Qx})$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4\}; \quad P = \{1,2\}; \quad Q = \{1,2,3\};$$



$$\exists x \neg (Px \wedge Qx)$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2,3,4}; Q = {1,2,3,4};



$$\exists x\,(Px \vee Qx)$$

Al menos un elemento pertenece a P o ese mismo elemento pertenece también a Q

Podrían estar situados en cualquiera de las 3 regiones que comprende la unión $P \cup Q$.

Que no debe ser vacía.

$$\exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{Px} \vee \boldsymbol{Qx})$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};

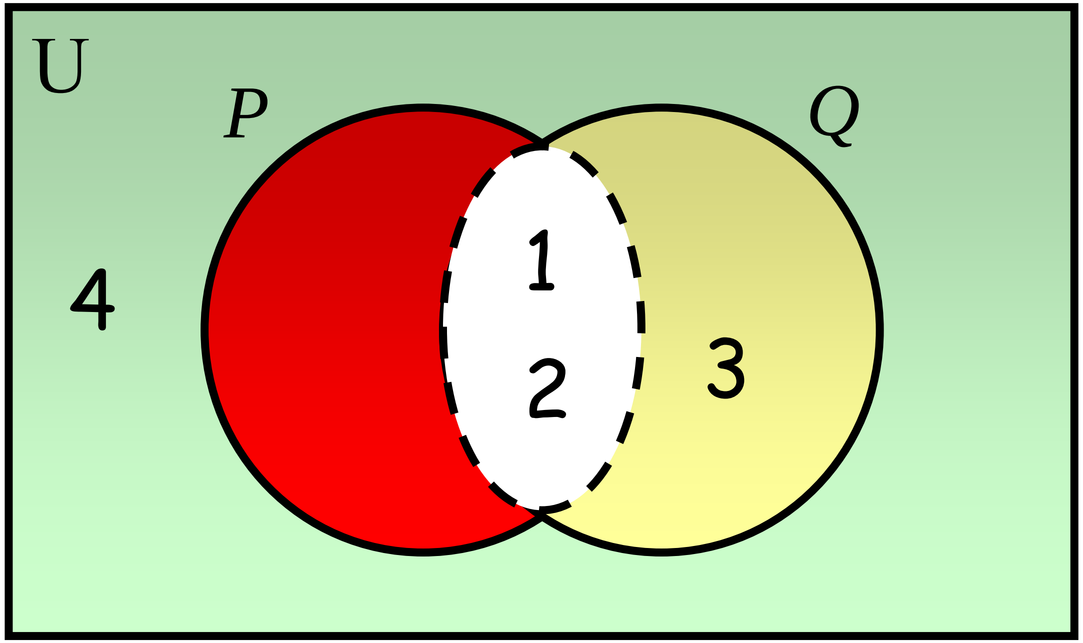
Verdadero

U = {1,2,3,4}; P = {2}; Q = {3};

Verdadero

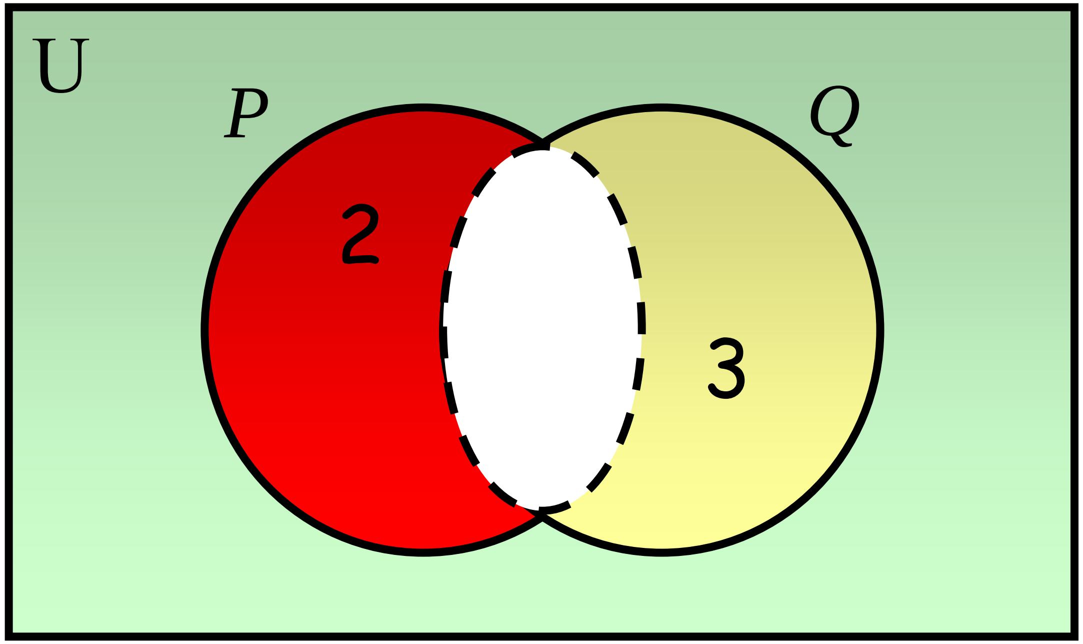
$$\exists x\,(Px \lor Qx)$$

U = {1,2,3,4}; P = {1,2}; Q = {1,2,3};



$$\exists x\,(Px \lor Qx)$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4\};\ \ P = \{2\};\ \ Q = \{3\};$$



Lógica de Predicados Diádicos

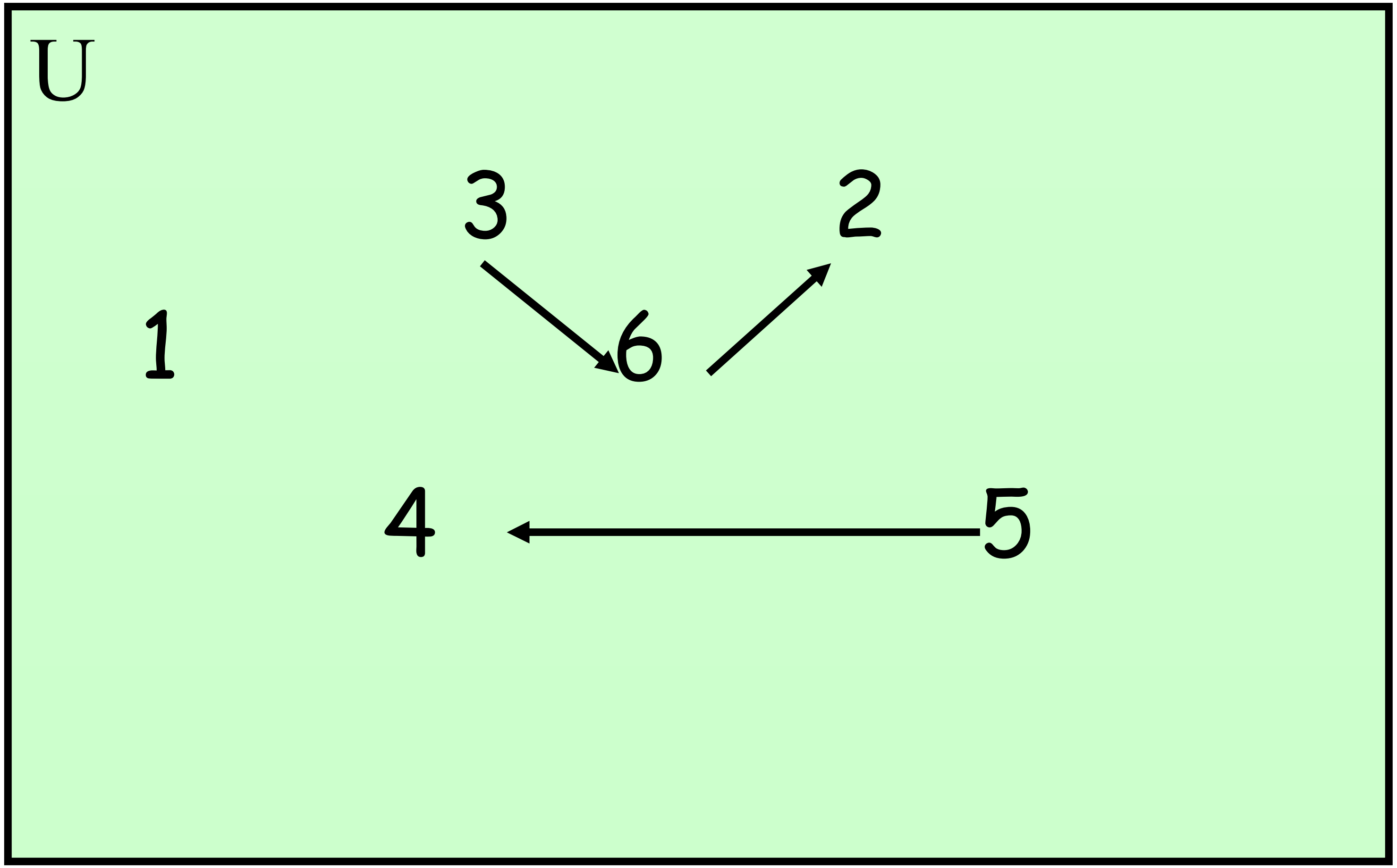
Sintaxis

Rab

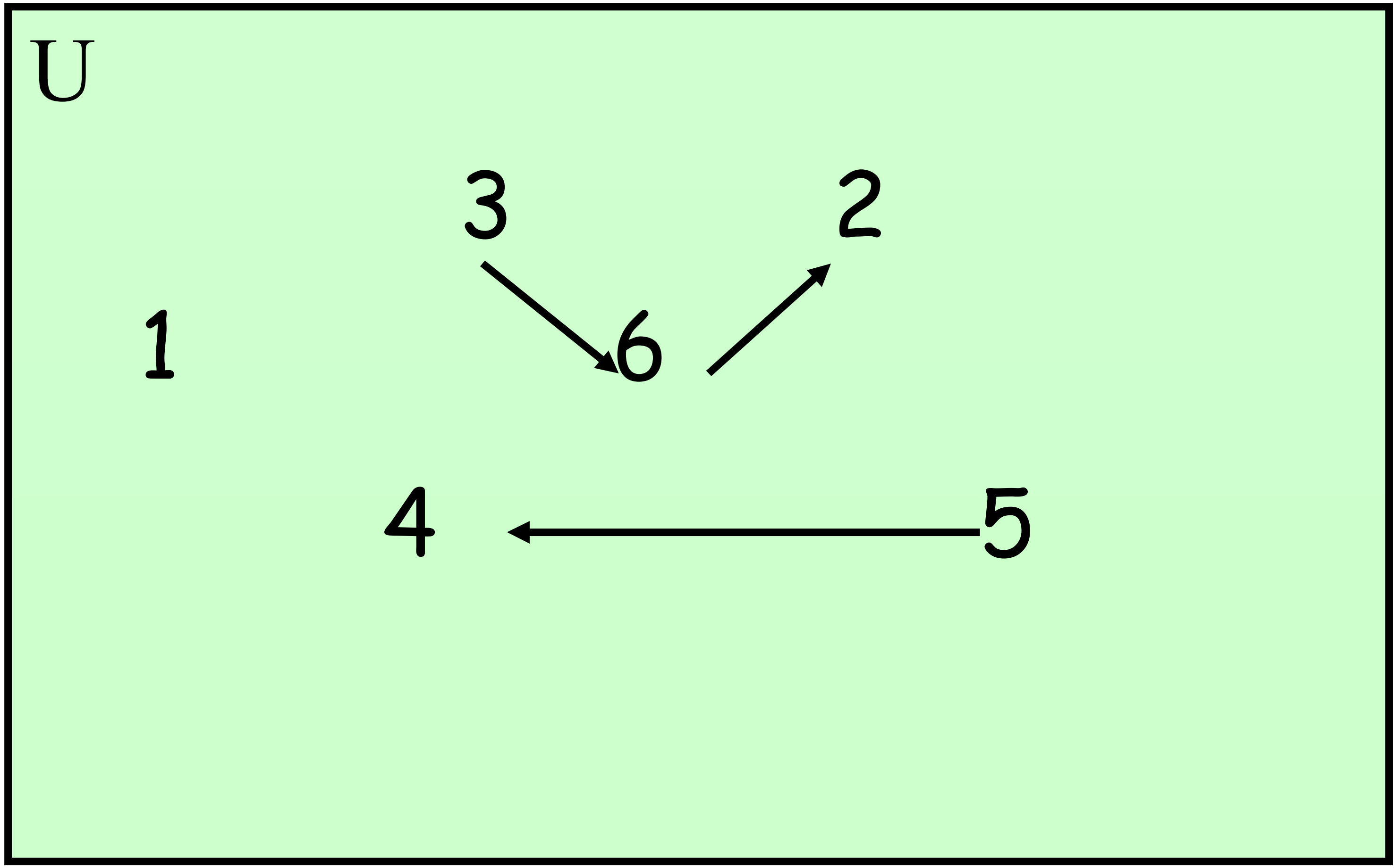
Es una relación de ***a*** a ***b*** donde tenemos que decidir si existe tal relación.

$$U = \{1,2,3,4,5,6\};\ \ R = \{(3,6),(5,4),(6,2)\};$$

$$a = 6;\ \ b = 2;$$

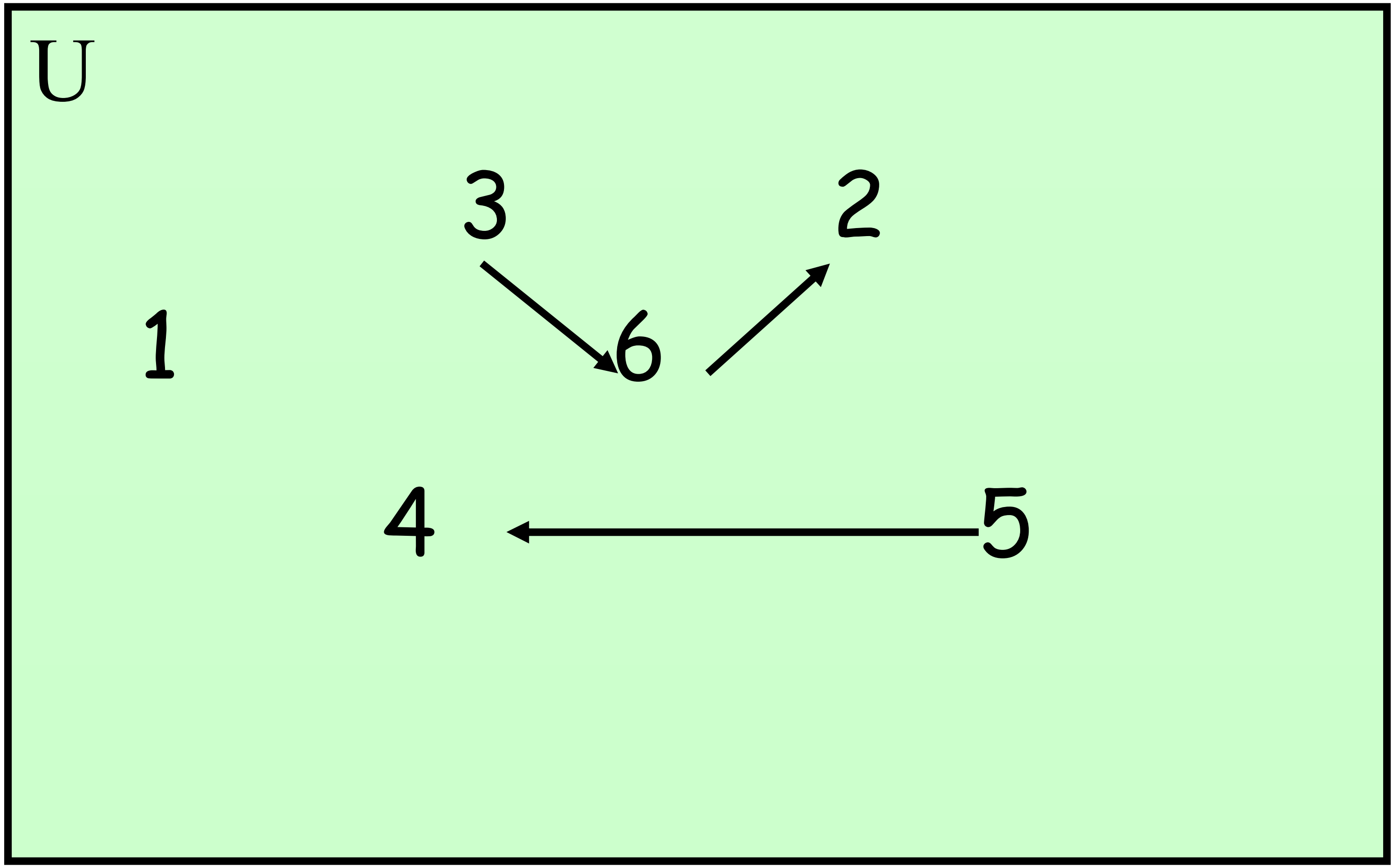


$$U = \{1,2,3,4,5,6\};\ \ R = \{(3,6),(5,4),(6,2)\};$$
$$a = 2;\ \ b = 6;$$

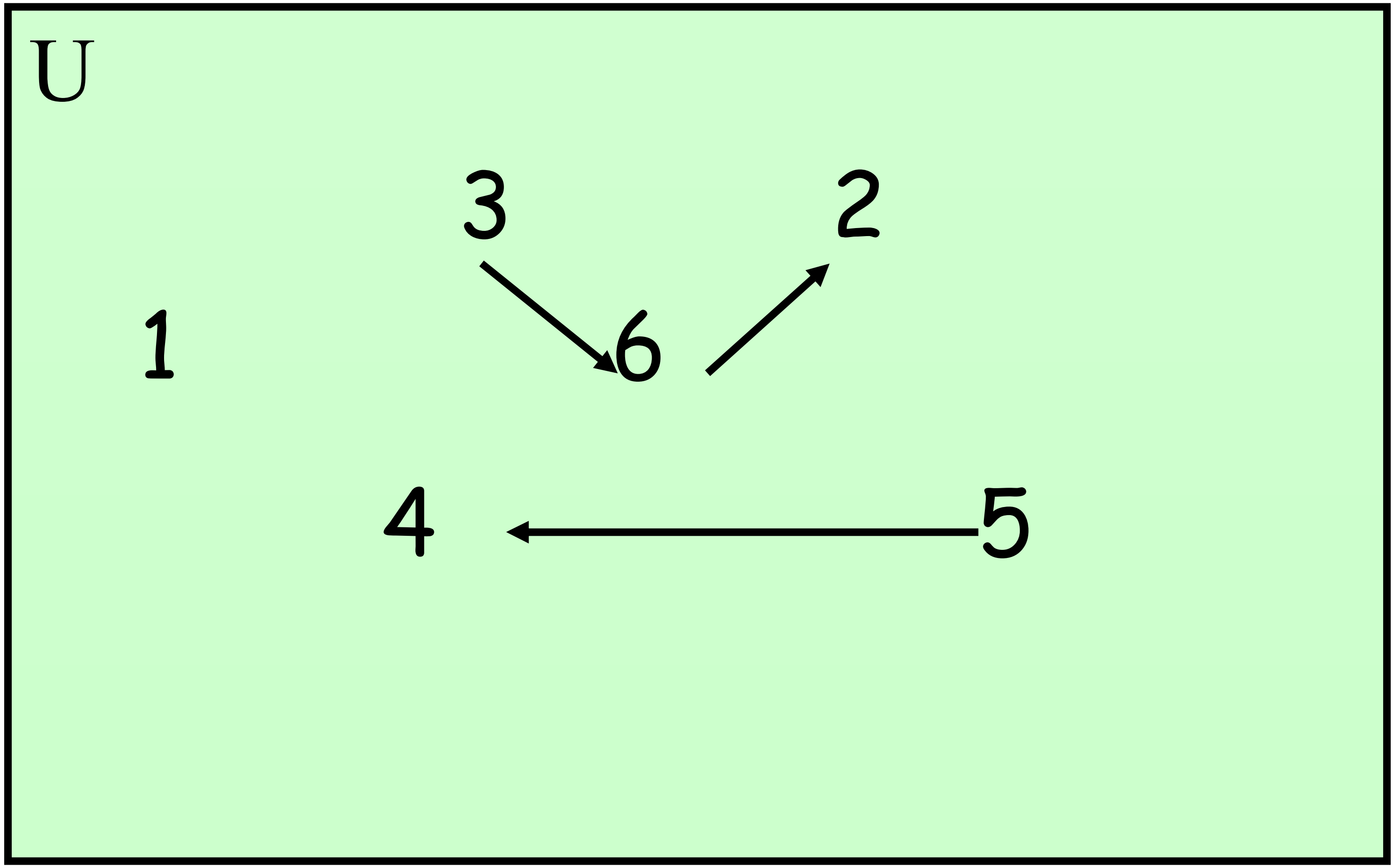


$$U = \{1,2,3,4,5,6\}; \;\; R = \{(3,6),(5,4),(6,2)\};$$

$$a = 1; \;\; b = 6;$$



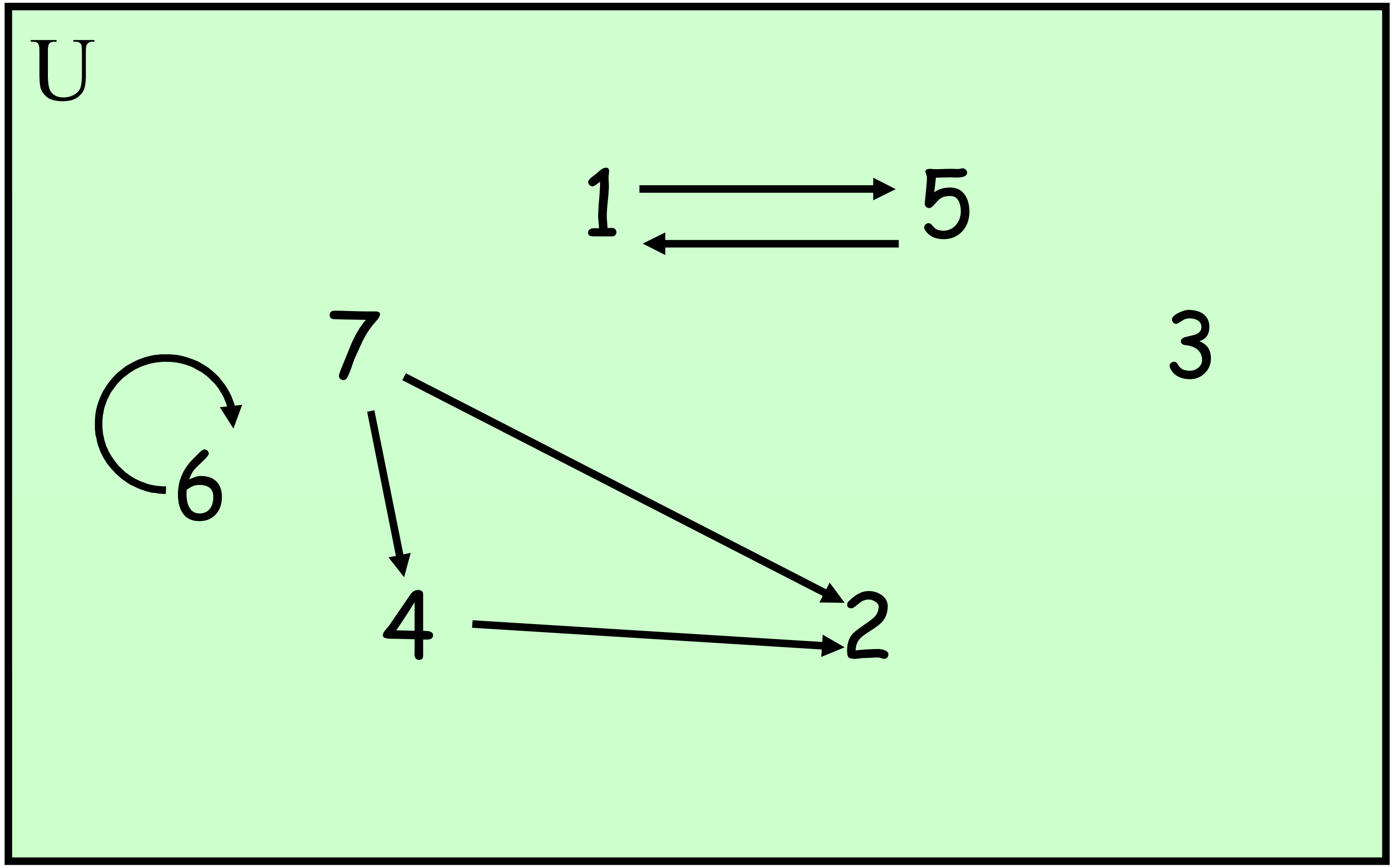
$$U = \{1,2,3,4,5,6\}; \quad R = \{(3,6),(5,4),(6,2)\};$$
$$a = 3; \quad b = 3;$$



Ejemplos de Lógica de Predicados Diádicos

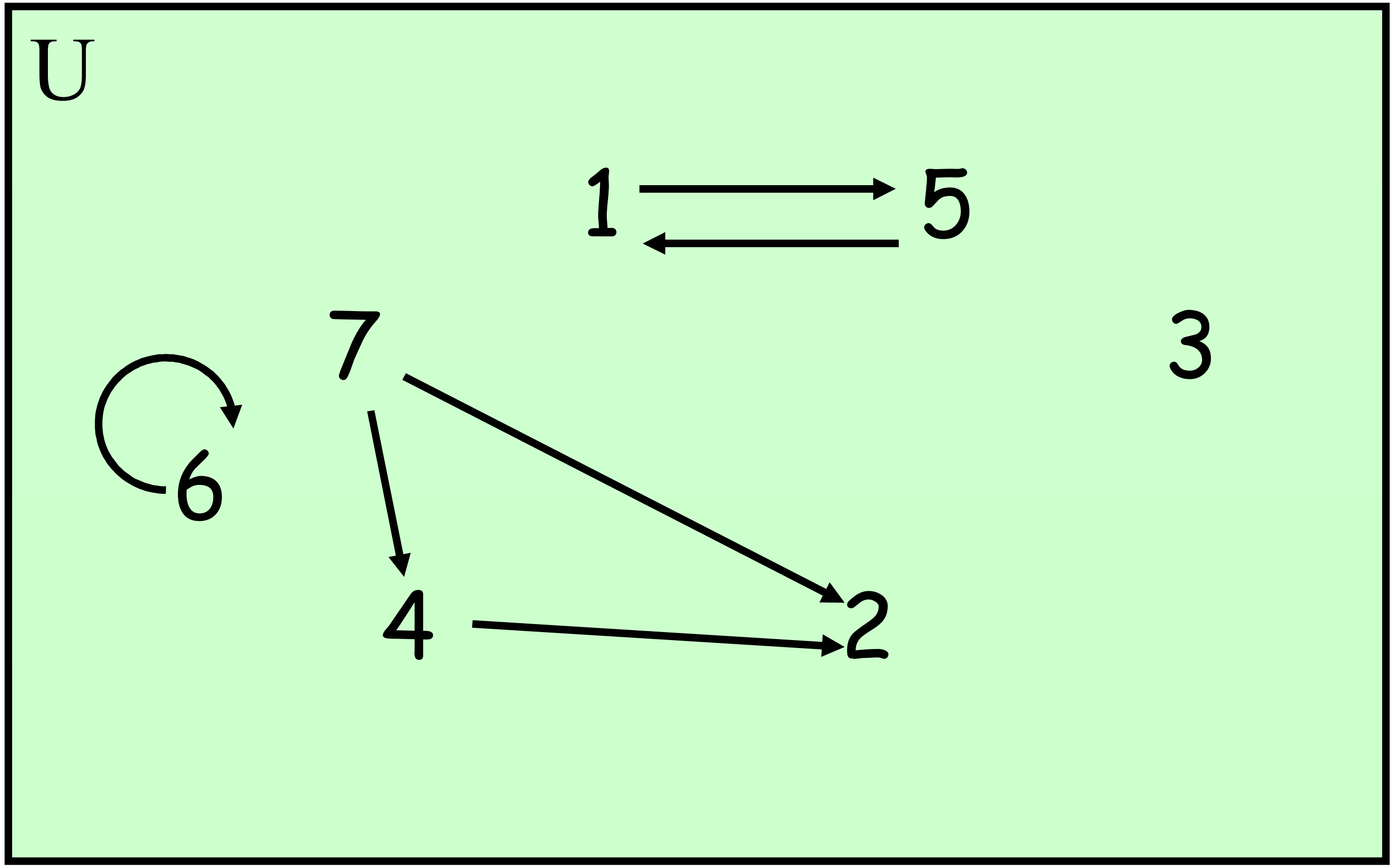
U = {1,2,3,4,5,6,7};

$\neg \boldsymbol{R}aa$; a = 6. Falso.



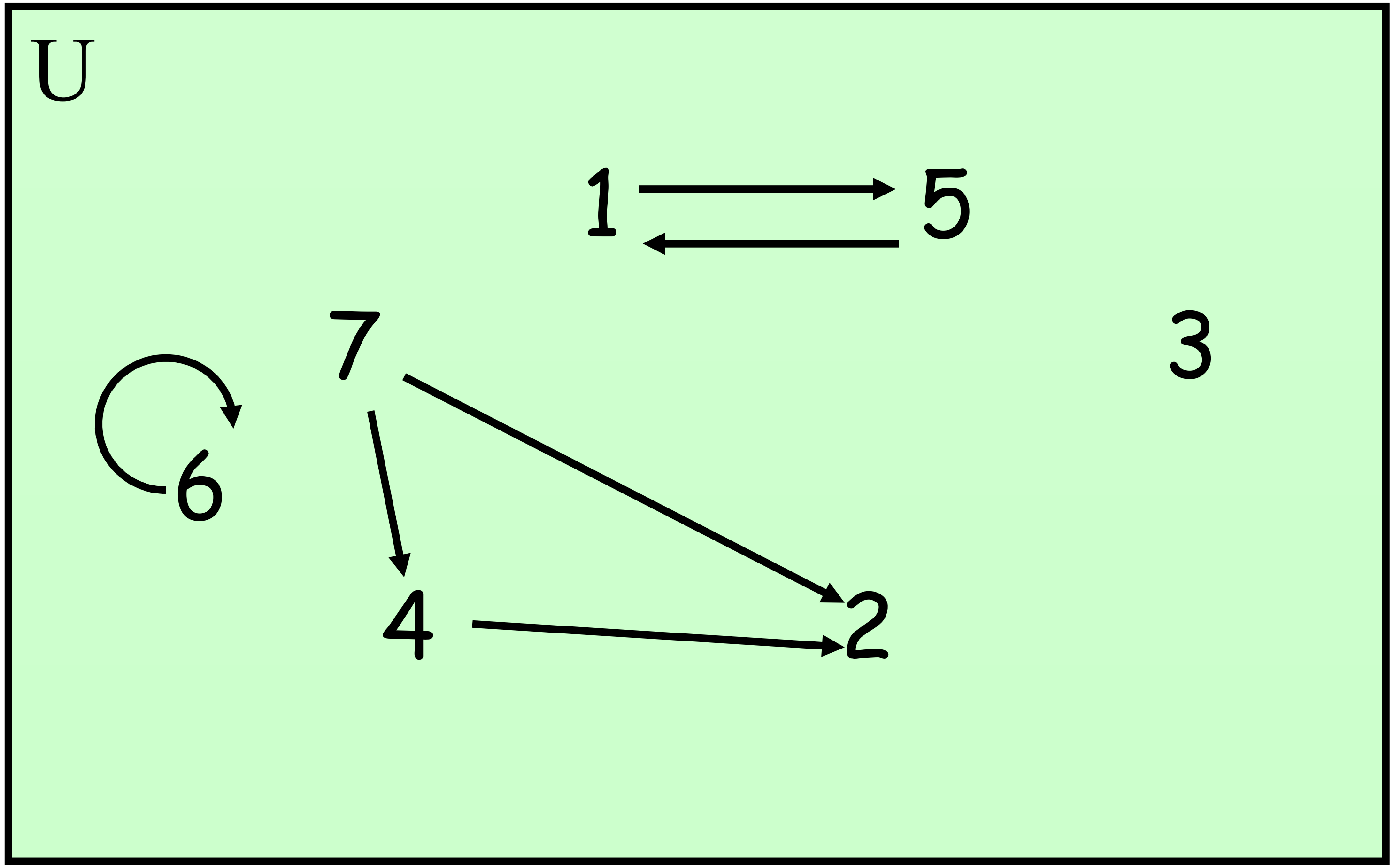
$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$

$\neg \boldsymbol{R}aa;\ \ a = 4$. Verdadero.



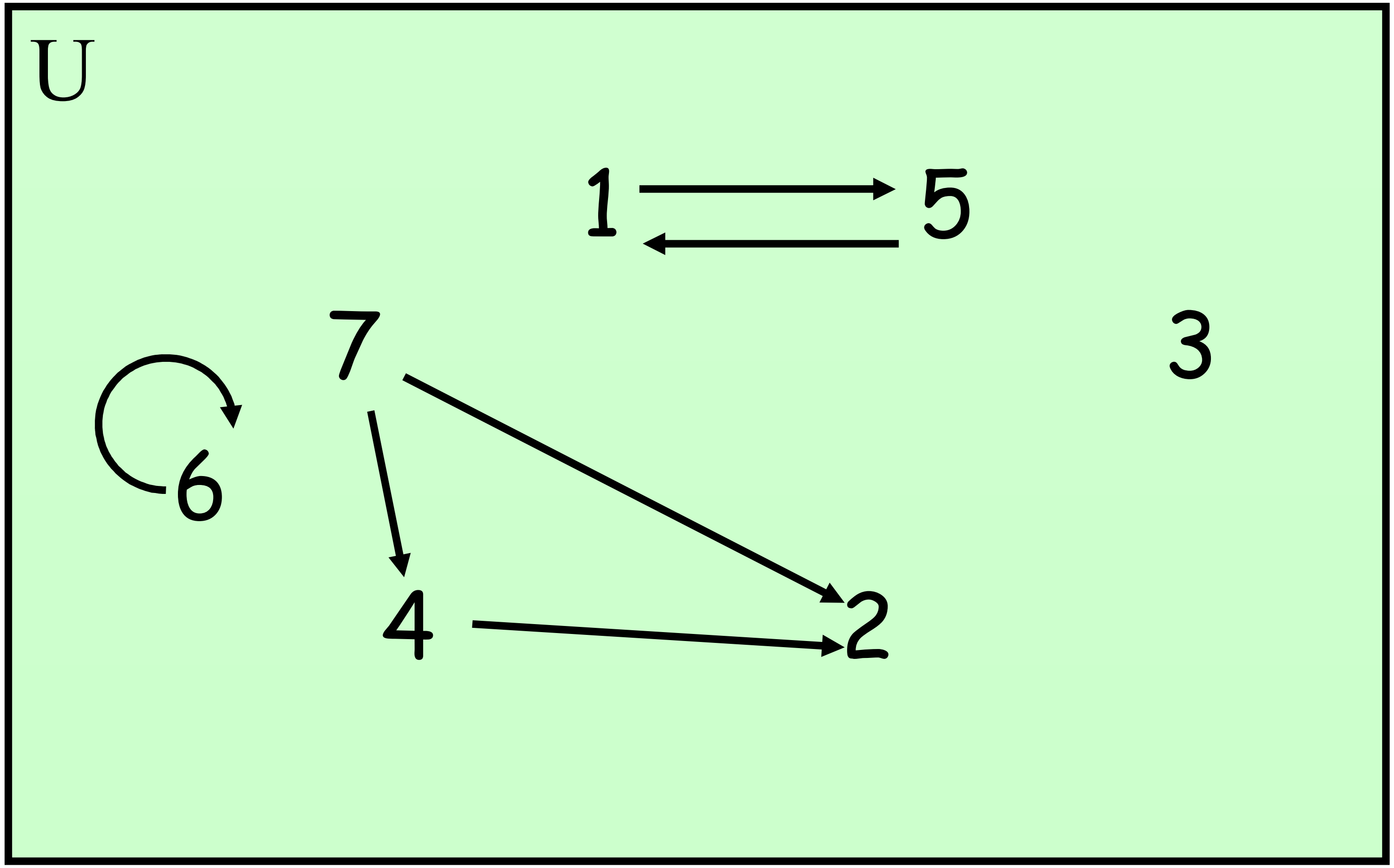
U = {1,2,3,4,5,6,7};

$\boldsymbol{R}ab \wedge \neg\boldsymbol{R}ab$; $a = 4$; $b = 2$. Falso.



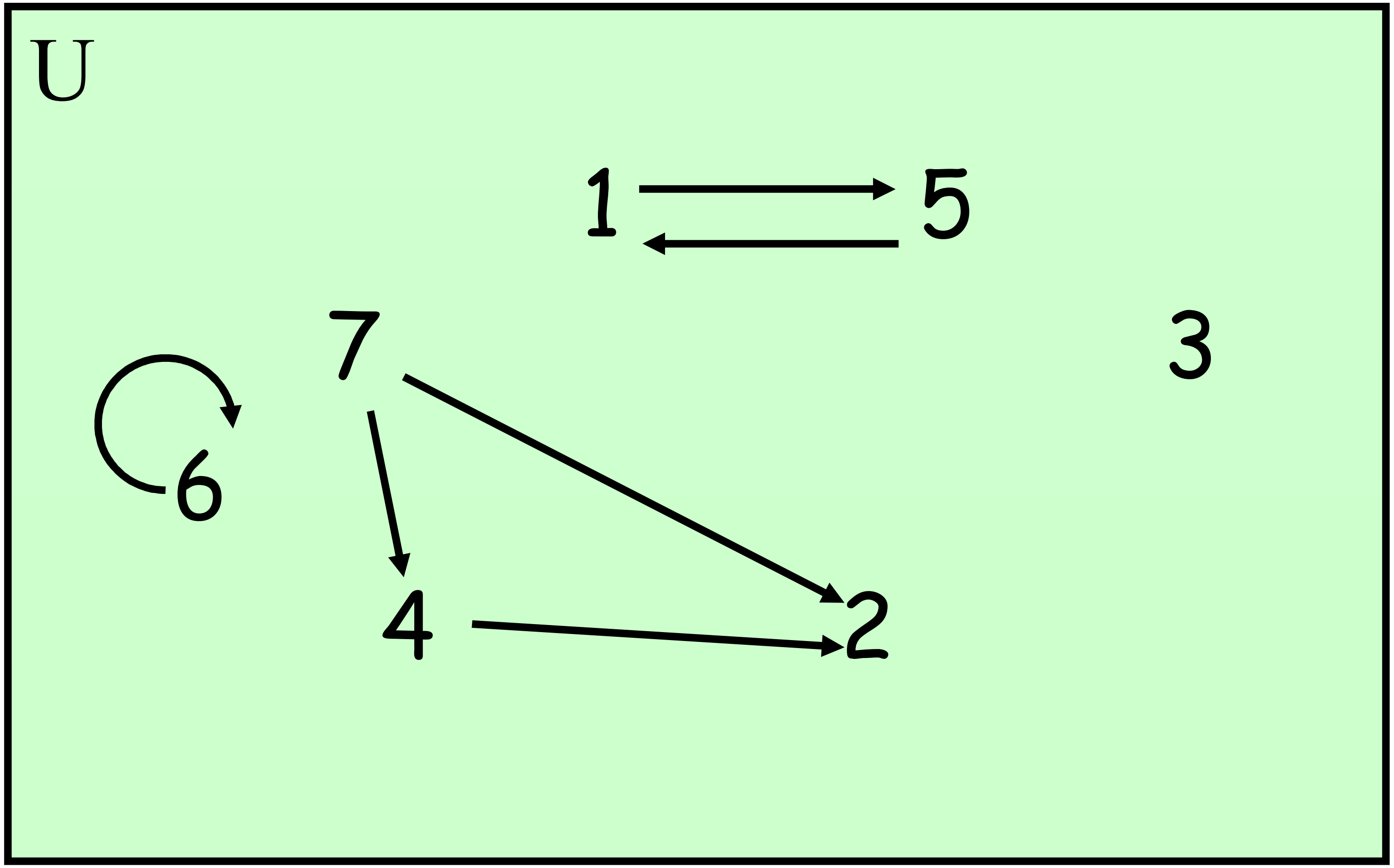
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a = 4$; $b = 2$. Falso.



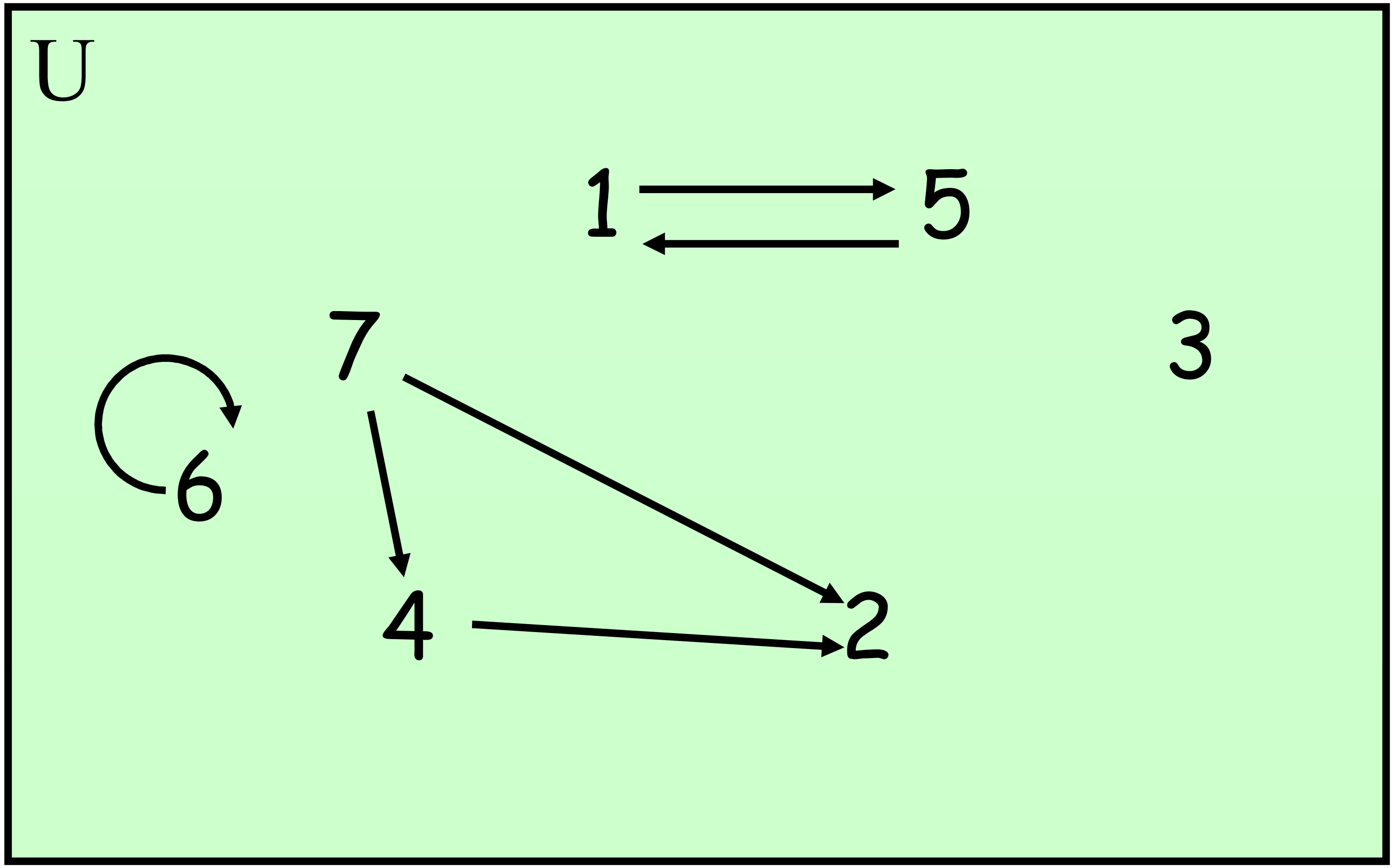
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba; \;\; a = 1; \;\; b = 5. \text{ Verdadero.}$$



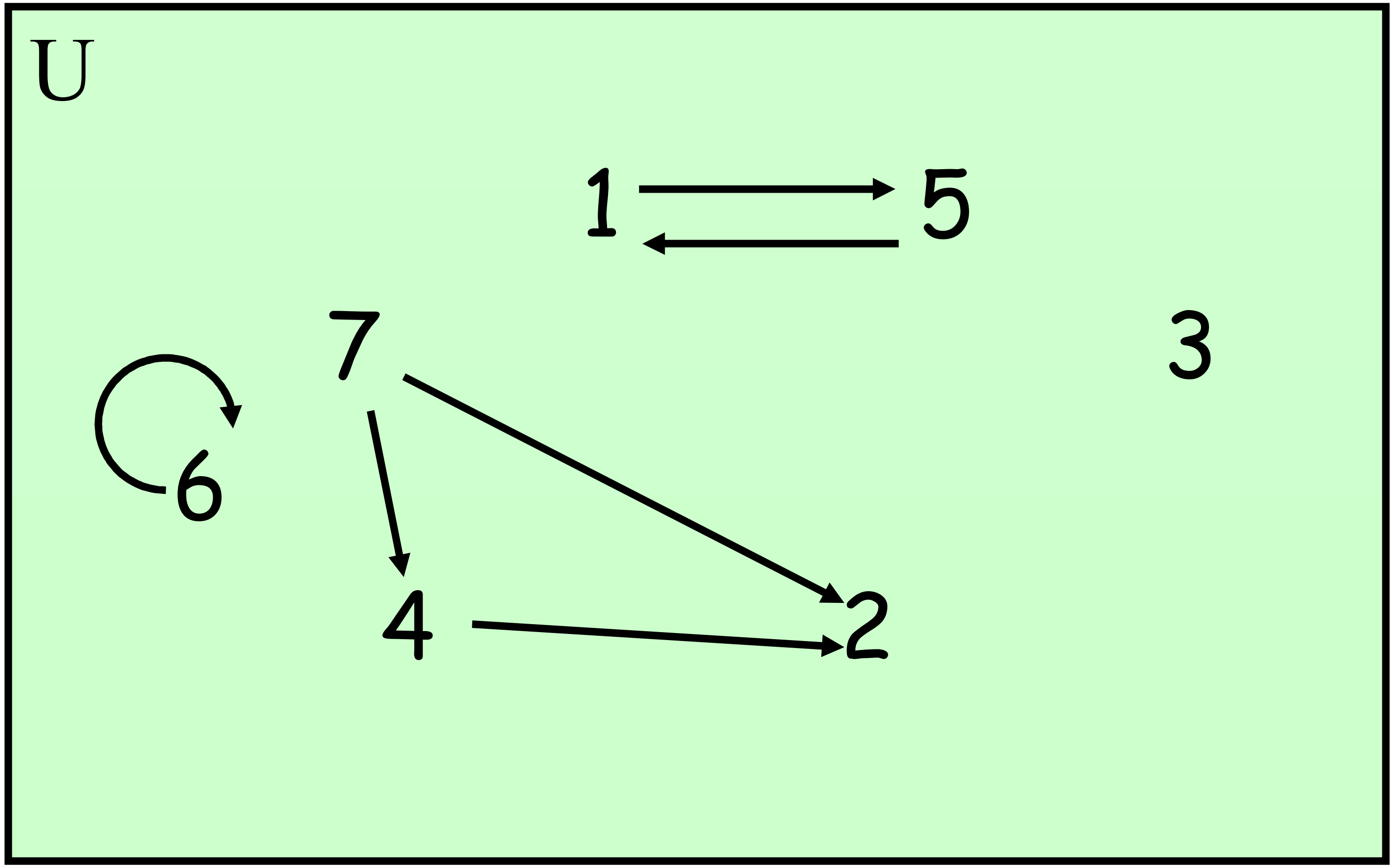
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a = 6$; $b = 6$. Verdadero.



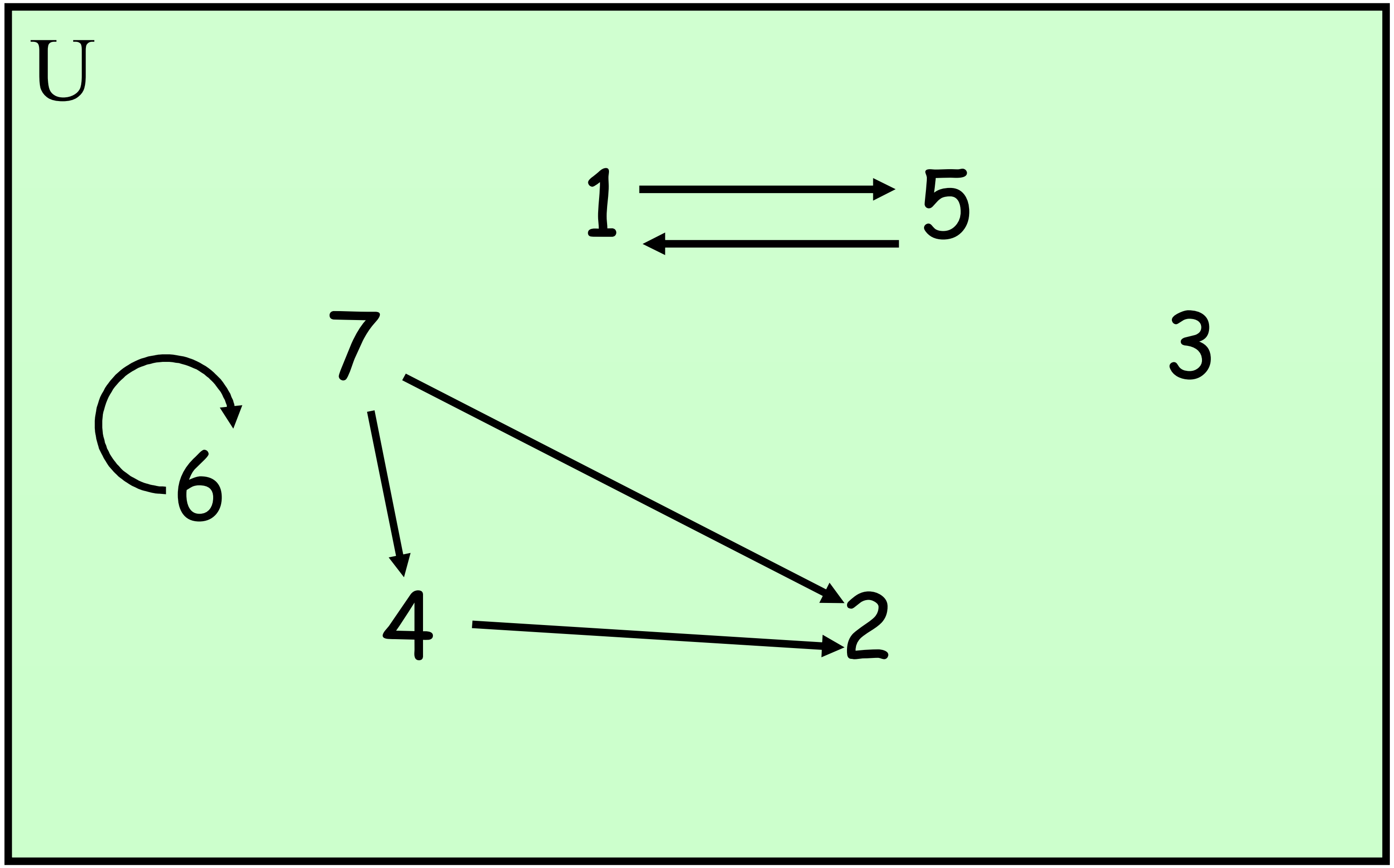
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$\boldsymbol{R}ab \rightarrow \boldsymbol{R}ba$; $a = 3$; $b = 5$. Verdadero.



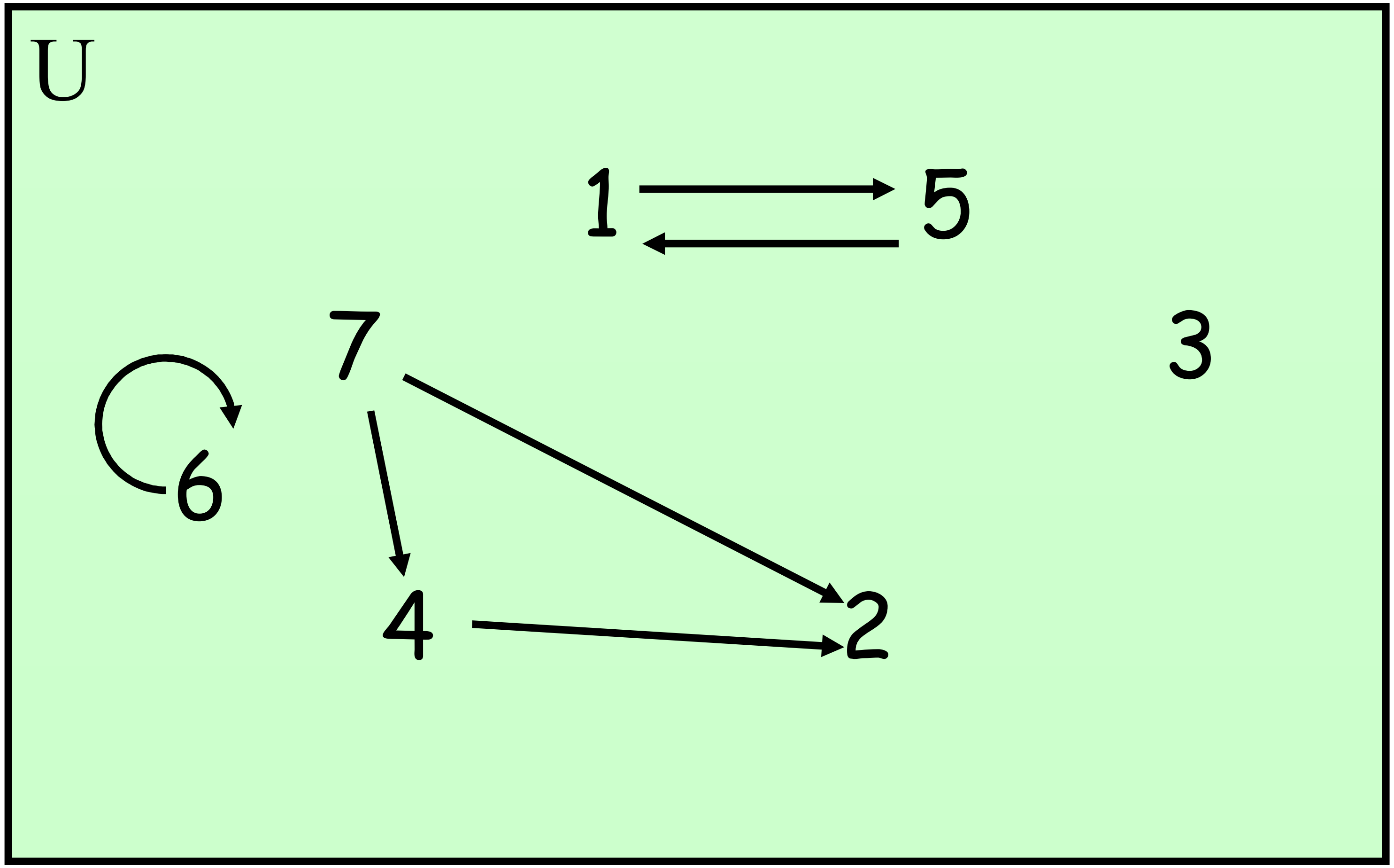
U = {1,2,3,4,5,6,7};

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a = 4$; $c = 2$. Verdadero.



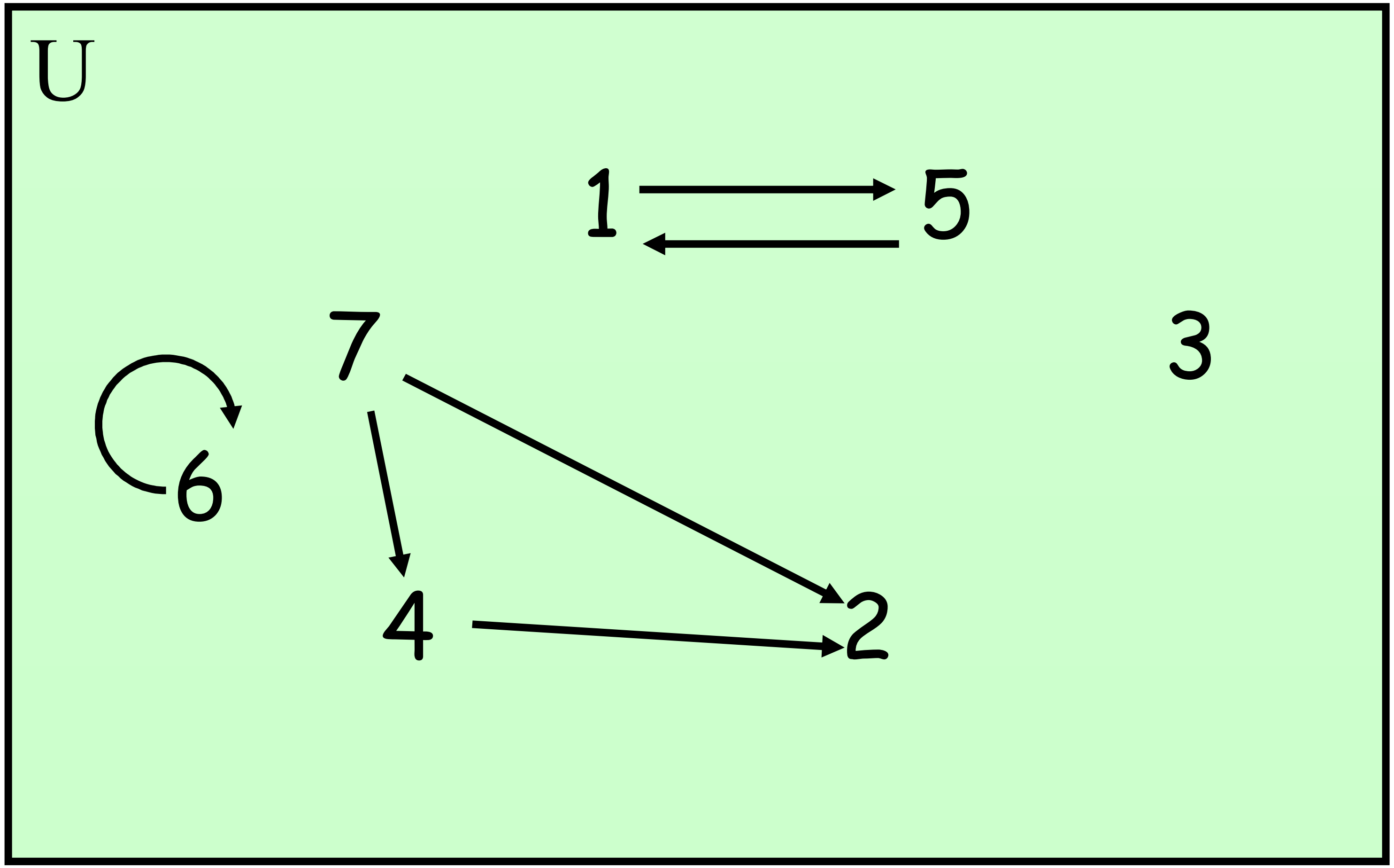
U = {1,2,3,4,5,6,7};

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; a = 1; c = 5. Falso.



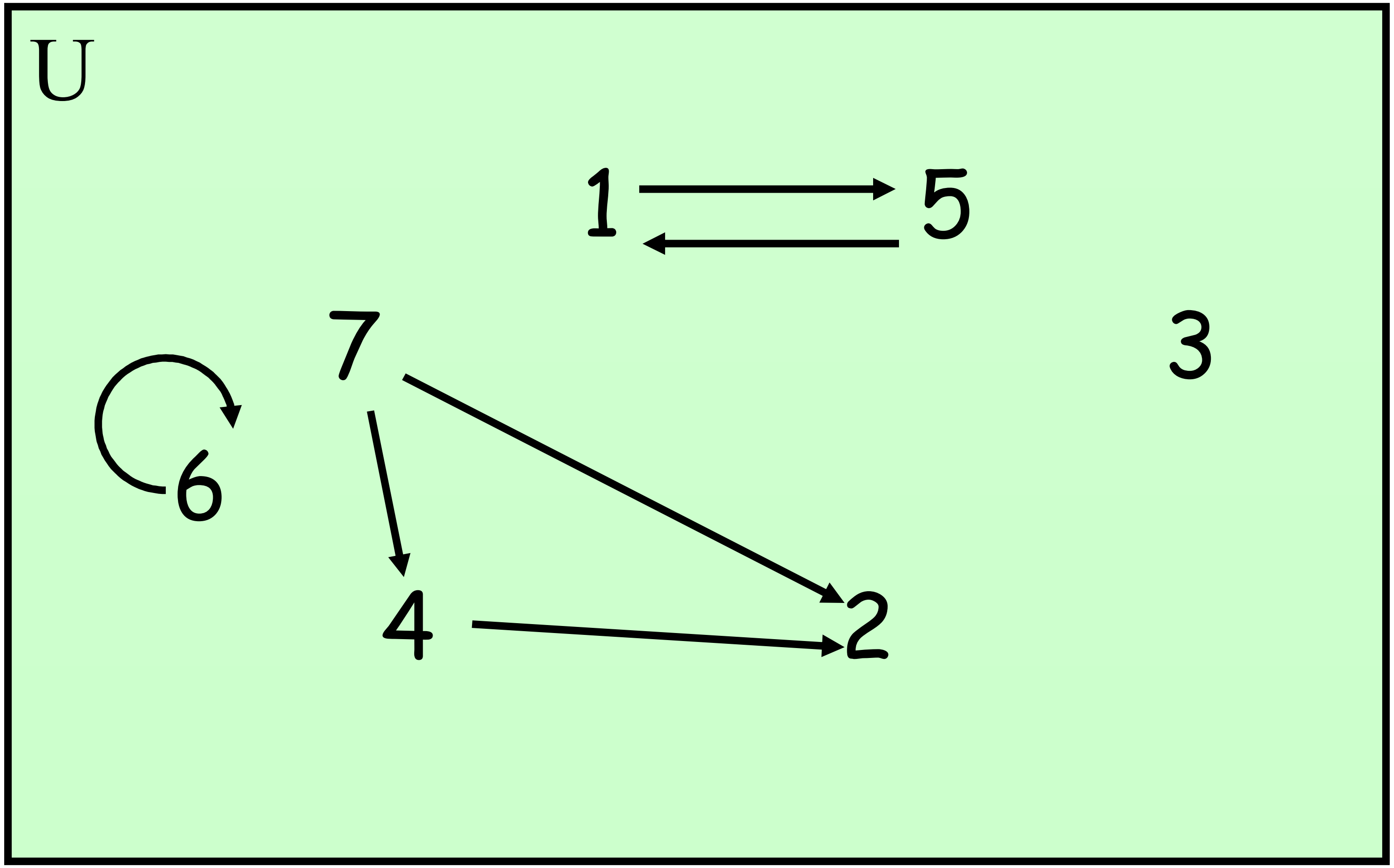
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; $a = 6$; $c = 6$. Falso.



U = {1,2,3,4,5,6,7};

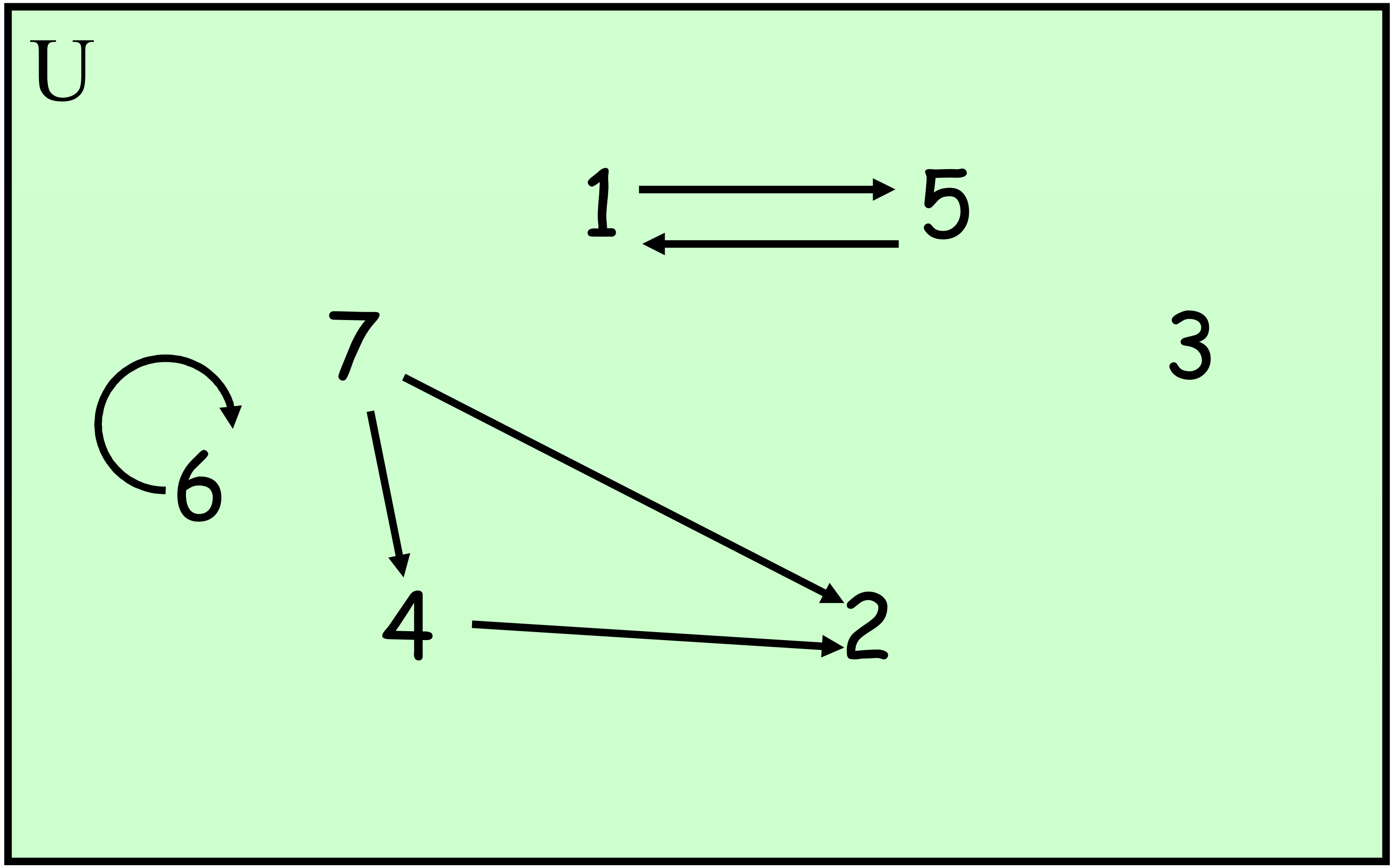
$\boldsymbol{R}ac \rightarrow \neg \boldsymbol{R}ca$; a = 3; c = 5. Verdadero.



$$U = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$$(\boldsymbol{R}ab \wedge \boldsymbol{R}bc) \rightarrow \boldsymbol{R}ac;\quad a = 7;\quad b = 4;\quad c = 2.$$

Verdadero.



$$\forall x \boldsymbol{Rax}$$

Para que esta interpretación sea verdadera, ***a*** tiene que estar relacionado con todos los elementos ***x*** del universo.

$$U = \{1,2,3,4,5\};$$

$$R = \{(1,3)\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5)\};$$

$a = 2$; Si

$$\forall x \boldsymbol{Rax}$$

$$U = \{1,2,3,4,5\};$$

$$R = \{(1,3)\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5)\};$$

$$a = 3;\ \ \text{No.}$$

$$\forall x Rxa$$

Para que esta interpretación sea verdadera, todos los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionados con ***a***.

$$\exists x \boldsymbol{Rax}$$

Para que esta interpretación sea verdadera, ***a*** tiene que estar relacionado con al menos uno de los elementos ***x*** del universo.

$\exists x \boldsymbol{Rxa}$

Para que esta interpretación sea verdadera, al menos uno de los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionado con ***a***.

$$\exists y \forall x \boldsymbol{R} yx$$

Para que esta interpretación sea verdadera, al menos un elemento ***y*** del universo debe de estar relacionado con todos los elementos ***x*** del universo.

$$U = \{1,2,3,4\};$$

$$R = \{(1,5),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\};$$

$$\exists x \forall y Rxy$$

Tenemos que determinar si existe al menos un elemento x que esté relacionado con todos los valores de y.

$$\exists x \forall y \boldsymbol{Rxy}$$

U = {1,2,3,4};

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,2)};

	1	2	3	4
1	●	●	●	●
2			●	
3		●		
4		●		

$\exists x \exists y \boldsymbol{R}xy$

Al menos un elemento ***x*** del universo debe de estar relacionado con un elemento ***y*** del universo.

$$U = \{1,2,3\}; \quad R = \{(2,3)\};$$

$$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{R} \boldsymbol{x} \boldsymbol{y}$$

Para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ debe de existir al menos un valor de $\boldsymbol{y}$.

$$U = \{1,2,3\}; \quad R = \{(1,2),(2,2),(3,1)\};$$

$$\forall x \forall y \boldsymbol{Rxy}$$

Todos los elementos ***x*** del universo tienen que estar relacionados con todos los elementos ***y*** del universo.

$$U = \{1,2,3\};$$

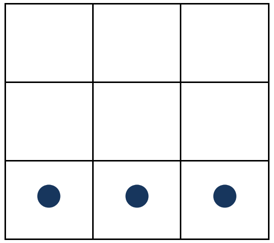
$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\};$$

Ejemplos Permutando los Cuantificadores

$$U = \{1,2,3\}$$

$$\forall y \exists x Rxy$$

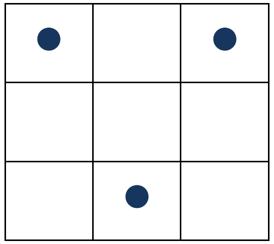
SI
SI
NO
NO



$$R = \{(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$\exists x \forall y Rxy$$

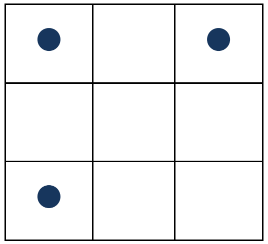
SI
NO
NO
NO



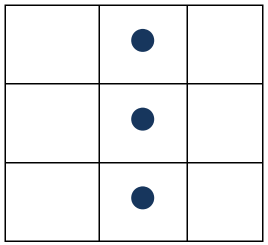
$$R = \{(1,1),(1,3),(3,2)\}$$

$$\exists x \forall y Ryx$$

NO
NO
NO
SI



$$R = \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$$

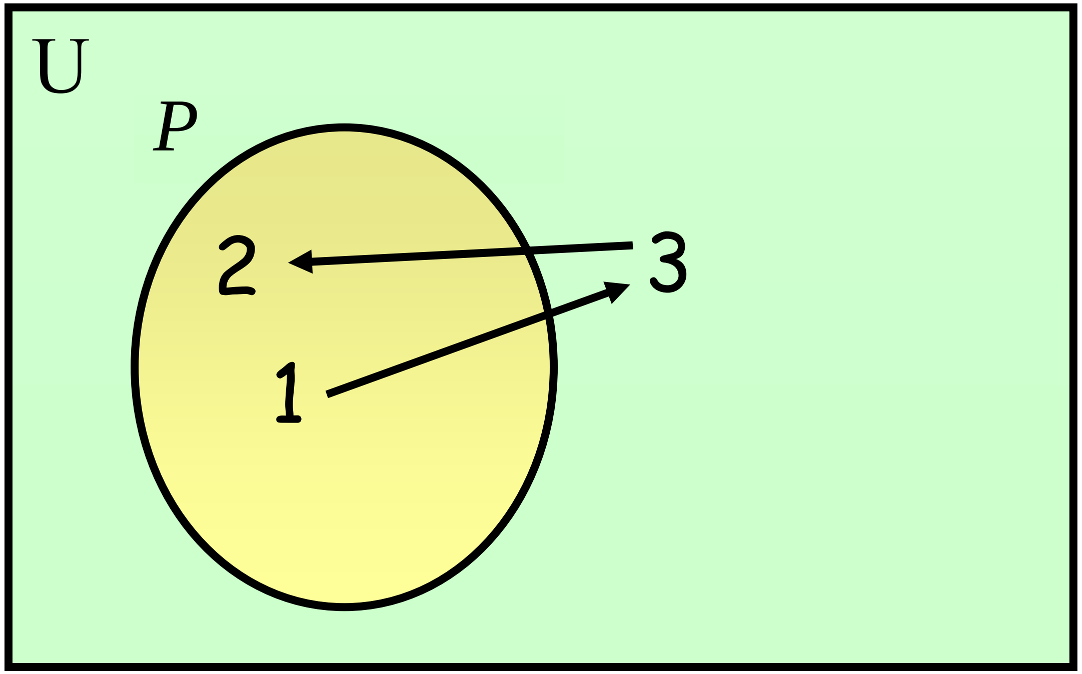


$$R = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$$

$$\forall x\,(Px \wedge \exists y Rxy)$$

$$U = \{1,2,3\};\ \ P = \{1,2\};\ \ R = \{(1,3),(3,2)\};$$

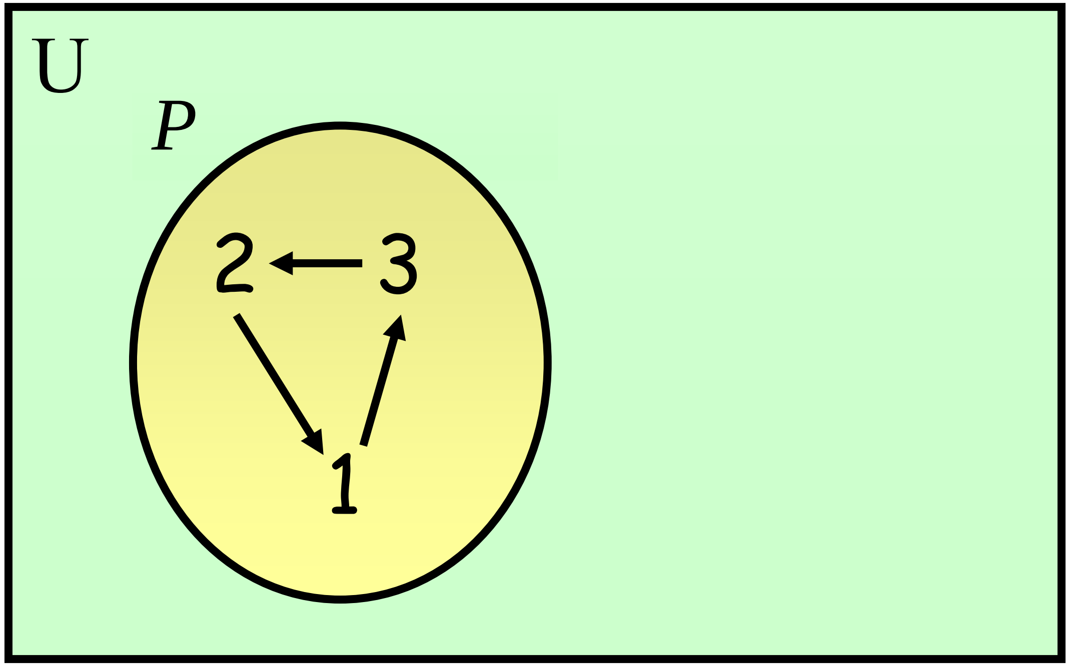
U	$\forall x(Px \wedge \exists y Rxy)$	**F**
1	**V** $\wedge$ **V**	**V**
2	**V** $\wedge$ **F**	**F**
3	**F** $\wedge$ **V**	**F**



$$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{Px} \wedge \exists \boldsymbol{yRxy})$$

U = {1,2,3};*P* = {1,2,3}; *R* = {(1,3),(2,1),(3,2)};

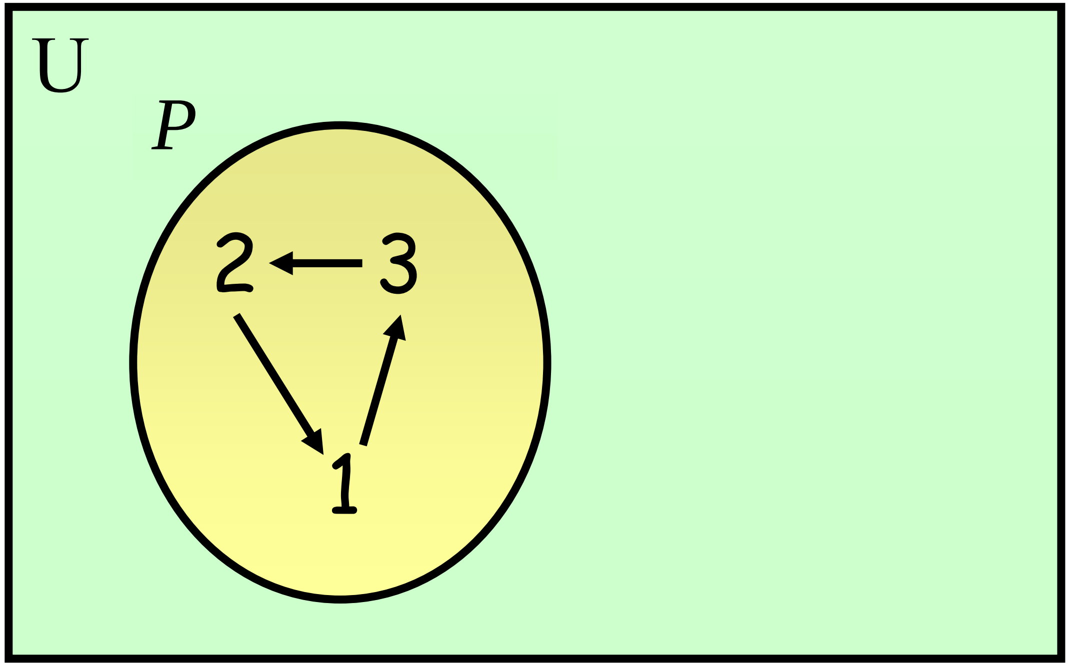
U	$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Px} \wedge \exists \boldsymbol{yRxy})$	**V**
1	**V**∧**V**	**V**
2	**V**∧**V**	**V**
3	**V**∧**V**	**V**



$$\forall x\,(Px \rightarrow \exists y Rxy)$$

$$U = \{1,2,3\}; P = \{1,2,3\};\ R = \{(1,3),(2,1),(3,2)\};$$

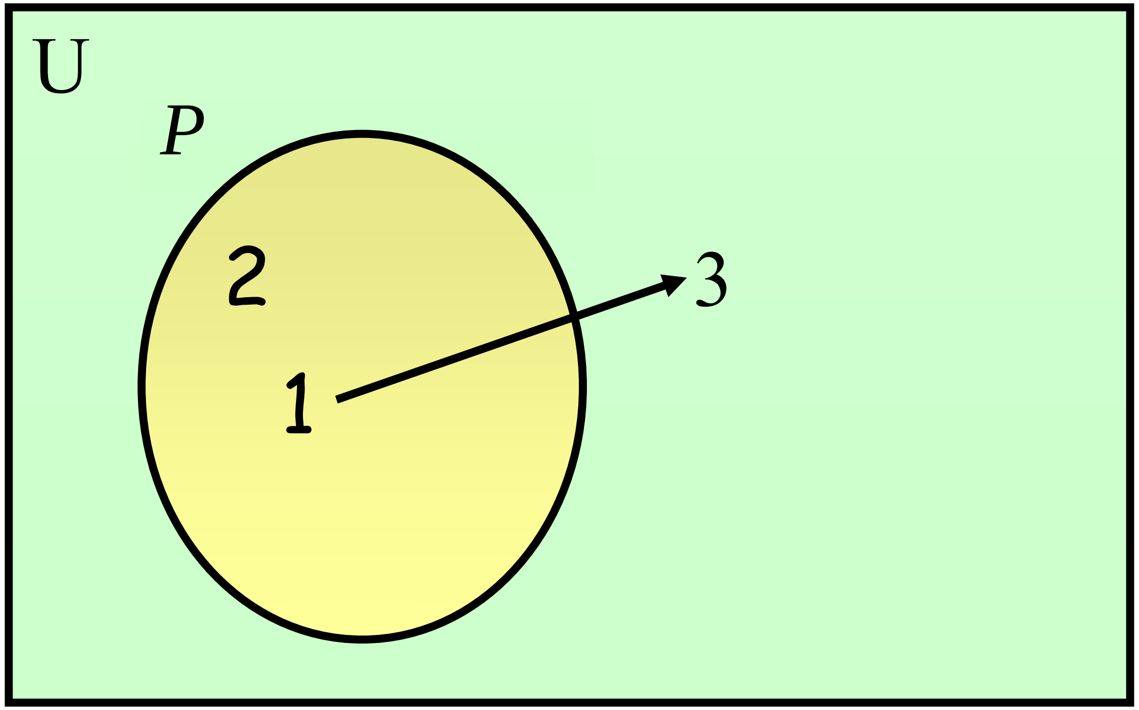
U	$\forall x(Px \rightarrow \exists y Rxy)$	**V**
1	**V**$\rightarrow$**V**	**V**
2	**V**$\rightarrow$**V**	**V**
3	**V**$\rightarrow$**V**	**V**



$$\forall x\,(Px \rightarrow \exists y Rxy)$$

$$U = \{1,2,3\};\ \ P = \{1,2\};\ \ R = \{(1,3)\};$$

U	$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$	**F**
1	**V**$\rightarrow$**V**	**V**
2	**V**$\rightarrow$**F**	**F**
3	**F**$\rightarrow$**F**	**V**



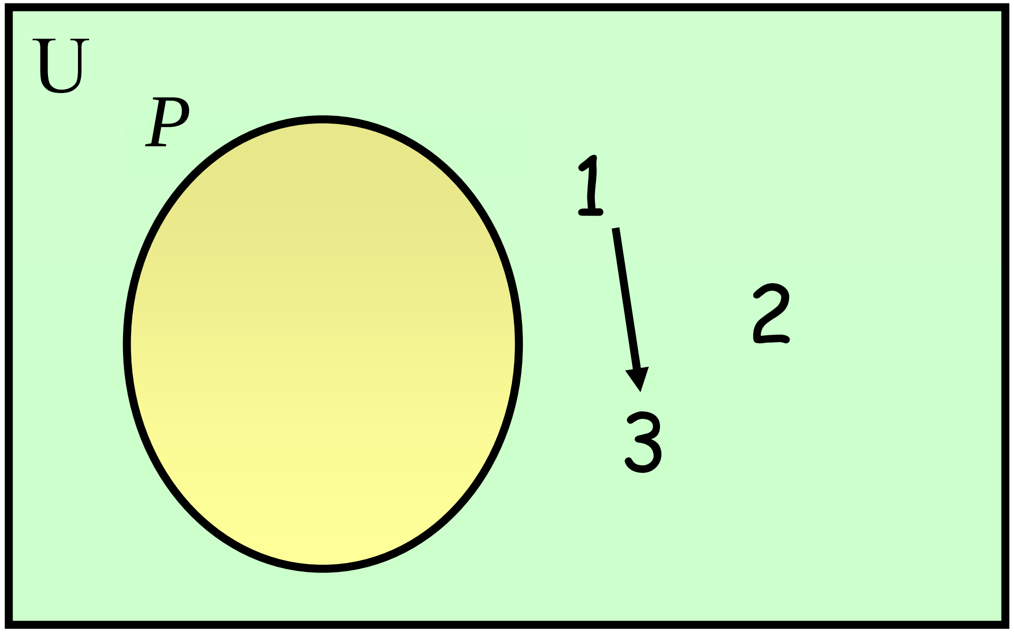
$$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{Px} \rightarrow \exists \boldsymbol{yRxy})$$

Esta fórmula no obliga a que haya elementos en ***P***, pero en el caso que los haya debe de cumplirse el consecuente.

$$\forall x\,(Px \rightarrow \exists y Rxy)$$

$$U = \{1,2,3\};\ P = \{\varnothing\};\ R = \{(1,3)\};$$

U	$\forall x(Px \rightarrow \exists y Rxy)$	**V**
1	**F→V**	**V**
2	**F→F**	**V**
3	**F→F**	**V**



Funciones

$$\forall x\, (\boldsymbol{P}x \lor \boldsymbol{Q}\, f(x))$$

$$U = \{1,2,3\};\ \ P = \{1,2\};\ \ Q = \{1,2\};$$

$$f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 2$$

que se podía haber escrito como:

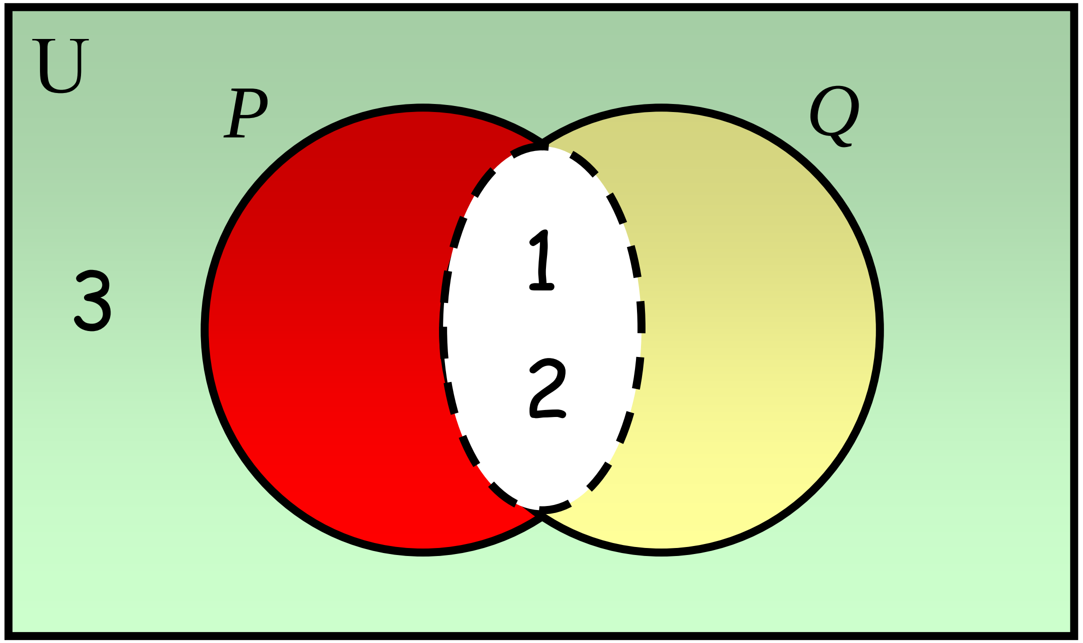
$$f = \{(1,3),(2,2),(3,2)\}$$

Resulta ser verdadero.

$$\forall x\,(\boldsymbol{P}x \vee \boldsymbol{Q}\,f(x))$$

$$\mathrm{U} = \{1,2,3\};\ \ P = \{1,2\};\ \ Q = \{1,2\};$$
$$f = \{(1,3),(2,2),(3,2)\};$$

U	$\forall x(Px \vee Q\,f(x))$	
1	V ∨ F	V
2	V ∨ V	V
3	F ∨ V	V



$$\exists x \exists y(Rxf(y) \wedge x \neq y)$$

$$U = \{0,1,2,3,4\};\ R_2 = \{(0,3),(1,2)\};$$

$$(x,y)$$

$$f_2 = \{(0,0),(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)\}$$

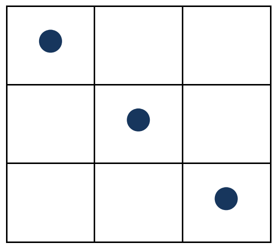
$f(1) = 3$ $f(3) = 2$

U	$\exists x \exists y(Rxf(y) \wedge x \neq y)$		
0	$R01 \wedge 0 \neq 3$	$V \wedge V$	V
1	$R13 \wedge 1 \neq 2$	$V \wedge V$	V

Identidad

Tratamos con predicados diádicos cuyos elementos se relacionan exclusivamente consigo mismo.

$\boldsymbol{I}ab$ U = {1,2,3}; I = {(1,1),(2,2),(3,3)};



La negación es: $\neg \boldsymbol{I}ab$; $\neg(a = b)$; $a \neq b$;

Satisfacibilidad

Una **fórmula** es **satisfacible** si existe algún universo, interpretación y asignación donde sea verdadera.

Un **conjunto** de **fórmulas** es **satisfacible** si existe algún universo, interpretación y asignación donde coincidan todas en ser verdaderas.

También podemos decir que un conjunto de fórmulas es satisfacible si, y sólo si, la fórmula conjunción de todas ellas es satisfacible.

Consecuencia

En todas las líneas en que las fórmulas denominadas ***premisas*** coinciden en ser verdaderas la consecuencia también lo es.

Diremos que C es consecuencia lógica de X,Y y Z.

$\{X, Y, Z\} \models C$;

Otra forma de hacerlo es así, ***las premisas implican lógicamente a la conclusión***: $X \wedge Y \wedge Z \rightarrow C$

Validez

Una fórmula es válida si se satisface para todo universo, toda interpretación y asignación.

Una fórmula es válida si y sólo si su negación es insatisfacible. Un conjunto de fórmulas es satisfacible si y sólo si la fórmula conjunción de todas ellas es satisfacible.

Equivalencias

Dos fórmulas φ y Ψ son ***equivalentes*** si $\varphi \vDash \Psi$ y $\Psi \vDash \varphi$.

Sobre la tabla de verdad, dos fórmulas equivalentes tienen exactamente los mismos valores de verdad sobre cada línea.

Escribiremos $\varphi \equiv \Psi$ cuando ambas fórmulas sean equivalentes y $\varphi \not\equiv \Psi$ cuando no lo sean.

$$\forall x P x \equiv \forall y P y$$

$$\neg \forall x P x \equiv \exists x \neg P x$$

$$\neg \exists x P x \equiv \forall x \neg P x$$

Forma Prenexa

La forma normal prenexa es una expresión que tiene todos los cuantificadores desplazados a la parte delantera de la expresión.

Una expresión está en forma normal prenexa si no hay cuantificadores en el ámbito de las conectivas lógicas

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Toda expresión puede transformarse en forma normal prenexa siguiendo estos pasos:

- Eliminar todas las apariciones de $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ de la expresión.
- Desplazar todas las negaciones hacia el interior de modo que al final las negaciones sólo aparezcan como partes de literales.
- Normalizar todas las variables.
- La forma normal prenexa se puede obtener desplazando todos los cuantificadores a la parte delantera de la expresión.

Encontrar la forma normal prenexa de

$$\forall x\left(\exists yR\left(x,y\right)\wedge\forall y\neg S\left(x,y\right)\rightarrow\neg\left(\exists yR\left(x,y\right)\wedge P\right)\right)$$

Primero eliminamos $\rightarrow$

$$\forall x\left(\neg\left(\exists yR\left(x,y\right)\wedge\forall y\neg S\left(x,y\right)\right)\vee\neg\left(\exists yR\left(x,y\right)\wedge P\right)\right)$$

Desplazamos las negaciones

$$\forall x\left(\forall y\neg R\left(x,y\right)\vee\exists yS\left(x,y\right)\vee\forall y\neg R\left(x,y\right)\vee\neg P\right)$$

Se normalizan los cuantificadores

$$\forall x\left(\forall y_1\neg R\left(x,y_1\right)\vee\exists y_2S\left(x,y_2\right)\vee\forall y_3\neg R\left(x,y_3\right)\vee\neg P\right)$$

Se desplazan los cuantificadores

$$\forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \left(\neg R(x, y_1) \vee S(x, y_2) \vee \neg R(x, y_3) \vee \neg P \right)$$

Tableaux

Si desea comprobar que una fórmula es ***consecuencia*** de otras, niéguela e incorpórela a esas otras.

Si este nuevo conjunto resulta ***insatisfacible***, efectivamente existía aquella relación de consecuencia.

Se utilizan para decidir la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas; indirectamente, para decidir la relación de consecuencia entre una fórmula y un conjunto: niegue aquélla e incorpórela al conjunto inicial analizado

Se construye un primer árbol, con una sola rama, que consta de tantos nodos como fórmulas haya en el conjunto inicial

Las ramas se pueden bifurcar si es de tipo β (disyuntiva) o ampliar linealmente si es de tipo α (conjuntiva), los nodos añadidos son subfórmulas adecuadas negadas o no de una fórmula en esa rama

Una rama es satisfacible si lo es el conjunto de todas sus fórmulas.

Si entre ellas se encuentran tanto una fórmula como su negación, la rama es insatisfacible.

Un árbol es satisfacible si lo es alguna de sus ramas

El árbol inicial es tan satisfacible como los sucesivos árboles ampliados; así, si se detecta que alguno de ellos es insatisfacible, también lo era el conjunto inicial de fórmulas

Reglas de Expansión α y β

Conjuntiva		Disyuntiva	
α	$\alpha_1 \quad \alpha_2$	β	$\beta_1 \quad \beta_2$
$X \wedge Y$	$X \quad Y$	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X \quad \neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X \quad \neg Y$	$X \vee Y$	$X \quad Y$
$\neg(X \rightarrow Y)$	$X \quad \neg Y$	$X \rightarrow Y$	$\neg X \quad Y$

Reglas de Expansión γ y δ

Universales		Existenciales	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall xX$	$X(t)$	$\exists xX$	$X(a)$
$\neg\exists xX$	$X(t)$	$\neg\forall xX$	$X(a)$

Todas ellas producen una expansión del árbol en un sólo nodo. No producen bifurcación del árbol.

Se obtiene una fórmula omitiendo el cuantificador principal.

Es lo que se conoce como instancia por sustitución de esta subfórmula.

El párrafo siguiente expone cuáles pueden ser las cadenas sustituyentes.

Parámetros

Cada lenguaje de primer orden fija sus propias constantes y funciones.

Si se pretende que el lenguaje sirva, para razonar sobre números naturales, debe incluir:

- Una constante (que se asignará al 0).
- Una función (la función sucesor).

Regla de Expansión γ

Los nodos "universales", <u>pueden reutilizarse</u>, expandirse en todas las ramas a las que pertenezcan cuantas veces se desee.

Se puede escoger en su expansión cualquier constante, utilizada anteriormente o no, estratégicamente, conviene utilizar constantes ya empleadas, para cerrar ramas.

Las fórmulas γ son del tipo:

- $\forall x \phi$.
- $\neg \exists x \phi$.

Su expansión es un único nodo de la forma:

- $\phi\ (x/p)$.
- $\neg \phi\ (x/p)$.

Donde todas las apariciones libres de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo término t.

Este término debe ser cerrado: no debe incluir variables, sólo constantes y funciones de L o constantes auxiliares.

Regla de Expansión δ

Deben utilizarse constantes no empleadas anteriormente, al menos no empleadas en esa rama.

Las fórmulas δ son del tipo:

- $\exists x\phi$.
- $\neg\forall x\phi$.

Su expansión es un único nodo de la forma:

- $\phi\ (x/p)$.
- $\neg\phi\ (x/p)$.

Donde todas las apariciones libres en ϕ de la variable del cuantificador se han sustituido por el mismo parámetro p.

Este parámetro, esta constante auxiliar, debe ser nueva en el árbol: no puede figurar en ninguna fórmula previa (realmente, basta que sea nueva en la rama).

Cada instanciación debe hacerse sobre una constante nueva.

De lo contrario, esta constante tendría unas propiedades (fijadas en otras fórmulas, donde aparece) que pueden modificar (innecesariamente) la decisión final sobre la satisfabilidad del conjunto.

Estratégicamente, siempre es preferible expandir:

- Primero las fórmulas proposicionales α y β.
- Luego las existenciales (δ).
- Finalmente las universales (γ) para intentar cerrar.

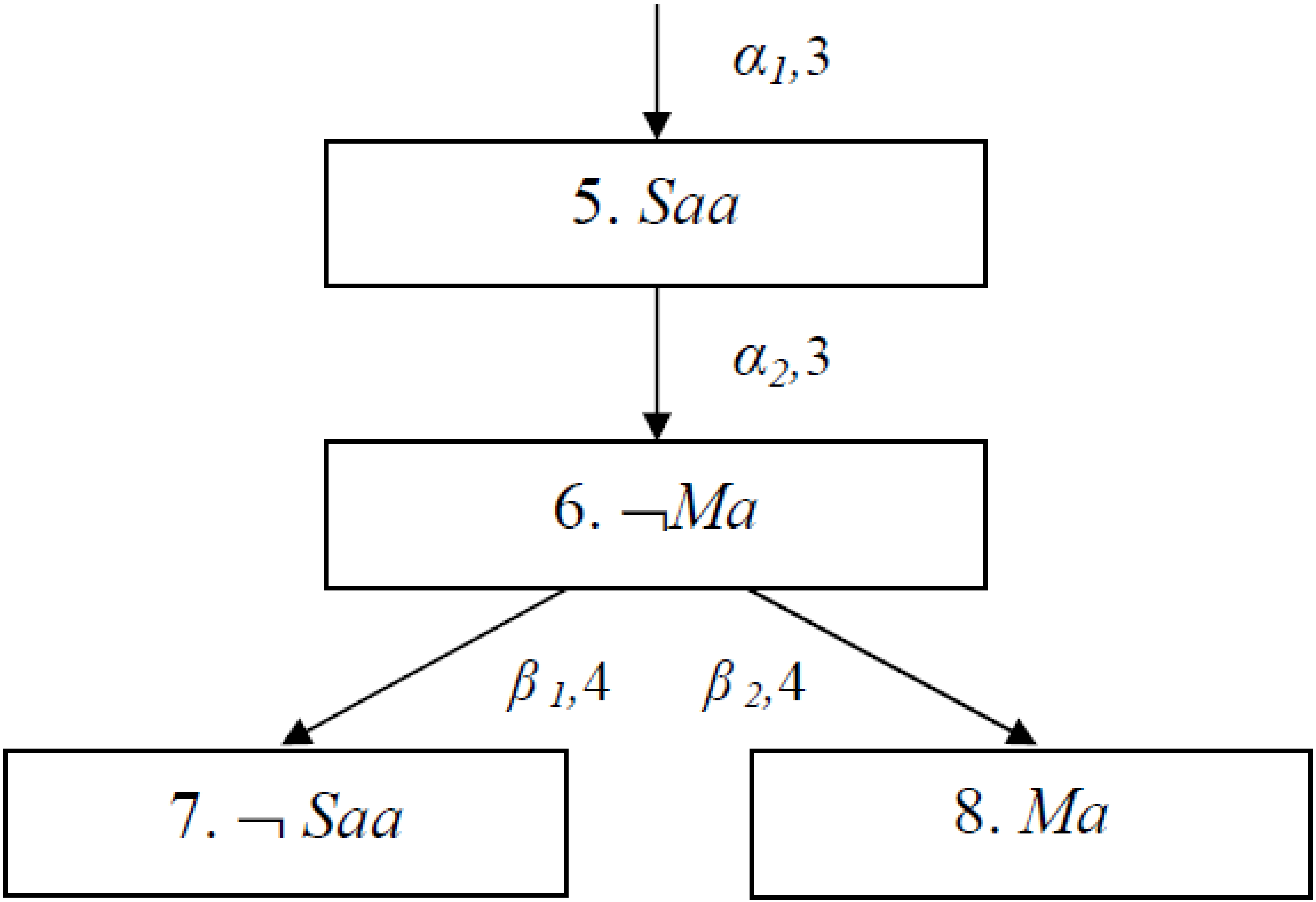
Consideramos el siguiente conjunto de fórmulas.

$$Y_4: \forall x\,(Sxx \rightarrow Mx)$$

$$Y_1: \exists z\,(Szz \wedge \neg Mz)$$

$$\mathrm{Y}_4 \models \neg \mathrm{Y}_1$$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1.\ \forall x\,(Sxx \to Mx)} \arrow[d] \\
\boxed{2.\ \exists z\,(Szz \land \neg Mz)} \arrow[d, "\delta{,}2"] \\
\boxed{3.\ Saa \land \neg Ma} \arrow[d, "\gamma{,}1"] \\
\boxed{4.\ Saa \to Ma}
\end{tikzcd}
$$


$\alpha_1, 3$
5. Saa
$\alpha_2, 3$
6. $\neg Ma$
$\beta_1, 4$
$\beta_2, 4$
7. $\neg Saa$
8. Ma